



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VISUALIZACIÓN DE SUPERFICIES
TIPO ROSA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:

Miriam Gutiérrez Antonio

ASESOR DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
28 de agosto de 2023



Introducción

En el presente trabajo abordamos las superficies tipo rosa, como caso particular de las superficies circulares analizamos aspectos geométricos de estas superficies, en particular construimos dichas superficies mediante el software Mathematica para poder visualizarlas.

De acuerdo a varios escritos relacionados al tema pudimos hallar que dichas superficies fueron estudiadas primeramente por Julius Plücker, matemático y físico que tuvo una aportación a la geometría analítica y algebraica, quizás la más conocida, fue dada a conocer en su trabajo *Theorie der algebraischen Curven*, donde introdujo las coordenadas lineales homogéneas de una línea recta, dada por una ecuación homogénea de la forma

$$\sum_{i=0}^6 a_i \eta_i$$

donde η_i son las coordenadas de la línea recta, definiendo así el complejo lineal que dio paso a la congruencia lineal.

Existieron varios métodos utilizados por Hamilton y Kummer para tratar a las líneas rectas dadas por Plücker, como rayos de una congruencia como se puede ver en [2] y [16], justamente este último es el que nos muestra las ideas para obtener el tipo de congruencia que se necesita para generar a las superficies tipo rosa, es decir, la congruencia circular. El tipo de estudio que realizó Plücker fue analizado más tarde por George Salmon y retomado recientemente por Sonja Gorjanc, profesor asistente del Departamento de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad de Zagreb quien destaca la importancia de la geometría pura y aplicada, véanse [4], [5], ..., [11].

Como prólogo al presente trabajo se ha considerado el trabajo de Sonja Gorjanc llamado *Rose Surfaces and their Visualizations*, véase [4], de ahí se toman las ideas con el único objeto de hacer que este pueda comprenderse por sí mismo. Así la tesis está conformada por tres capítulos como se describe a continuación:

En el primer capítulo se expone el proceso mediante el cual podemos generar las superficies circulares, véase [5], [9] y [11], a partir de una congruencia de circunferencias que se construye considerando circunferencias en una congruencia de líneas, ver [1], [3] y [9], con dos puntos dados sobre el eje z del espacio euclidiano tridimensional, véanse también [2], [12], [14], [15] y [16].

En el segundo capítulo mostramos la construcción de las curvas cíclicas cuyo estudio sirve de antesala a las curvas rosa o curvas de rhodonea, las cuales son obtenidas de la ecuación

$$\rho = a \cdot \cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) + k,$$

véanse [13], [21], [22] y [23]. También, obtenemos la ecuación implícita de dichas curvas a partir del desarrollo de [20] y como se da en [4], y son visualizadas a través del software Mathematica [17], [18], [19].

Para la conformación del tercer y último capítulo se hace uso de la construcción de las curvas tipo rosa dada en el segundo capítulo, mediante las superficies circulares dadas en el primer capítulo, para mostrar como se generan las superficies tipo rosa, y la generalización de este tipo de superficies, véase [5], [6], [7], [8] y [10], y su visualización mediante el software Mathematica.

Al final de este trabajo incluimos un Apéndice donde se proporcionan códigos, que se pueden implementar en el software Mathematica, para poder visualizar la curvas y superficies tipo rosa.

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares	2
1.1. Las coordenadas de una línea recta	2
1.2. Congruencias	8
1.3. Superficies Circulares $\mathcal{CS}(\alpha, p)$	19
1.3.1. Ecuaciones paramétricas de $\mathcal{CS}(\alpha, p)$	20
2. Curvas cíclicas armónicas	24
2.1. Movimiento armónico simple	24
2.2. Construcción y clasificación de las curvas cíclicas armónicas . .	31
2.3. Curvas tipo rosa	36
3. Superficies tipo rosa	45
3.1. Ecuaciones Paramétricas de $\mathcal{R}(n, d, p)$	46
3.2. Ecuaciones implícitas de $\mathcal{R}(n, d, p)$	49
3.3. Visualización de $\mathcal{R}(n, d, p)$	50
3.4. Generalización de Superficies tipo rosa	52
3.5. Visualización de las superficies tipo rosa generalizadas	56
Apéndice	60
Bibliografía	70

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen conceptos básicos que utilizaremos y que nos encaminaran a conocer mejor el tema a desarrollar, de aquí en adelante utilizaremos la siguiente notación.

Notación: Sean P , Q y R puntos en el espacio tridimensional.

- \overline{PQ} denota el segmento de recta entre los puntos P y Q .
- \overleftrightarrow{PQ} denota la recta que pasa por los puntos P y Q .
- \widehat{PQ} denota el arco entre los puntos P y Q .
- PQ denota la distancia entre los puntos P y Q , o la longitud del segmento \overline{PQ} .
- $\triangle PQR$ denota el triángulo con vértices P , Q y R .
- $\angle PQR$ denota el ángulo con vértice Q .

1.1. Las coordenadas de una línea recta

Consideremos las ecuaciones de cualesquiera dos planos digamos:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

con A, B' distintos de cero, juntas representan su línea de intersección, es decir, representan a todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen ambas ecuaciones.

Al eliminar x e y alternadamente de las ecuaciones, las reducimos a una forma de uso común, como se muestra a continuación.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $y = 0$ en la primera ecuación de (1.1). Si $m = \frac{-C}{A}$ y $a = \frac{-D}{A}$ obtenemos $x = mz + a$.

Análogamente, si $x = 0$ en la segunda ecuación de (1.1) y consideramos $n = \frac{-C'}{B'}$ y $b = \frac{-D'}{B'}$, entonces la ecuación resultante es $y = nz + b$.

La primera ecuación representa la proyección de la línea en el plano xz y la segunda, su proyección en el plano yz , véase la Figura 1.1. Observe que las ecuaciones de una línea recta incluyen cuatro constantes independientes a saber m, a, n y b , esto también puede verse en [15, pág. 30].

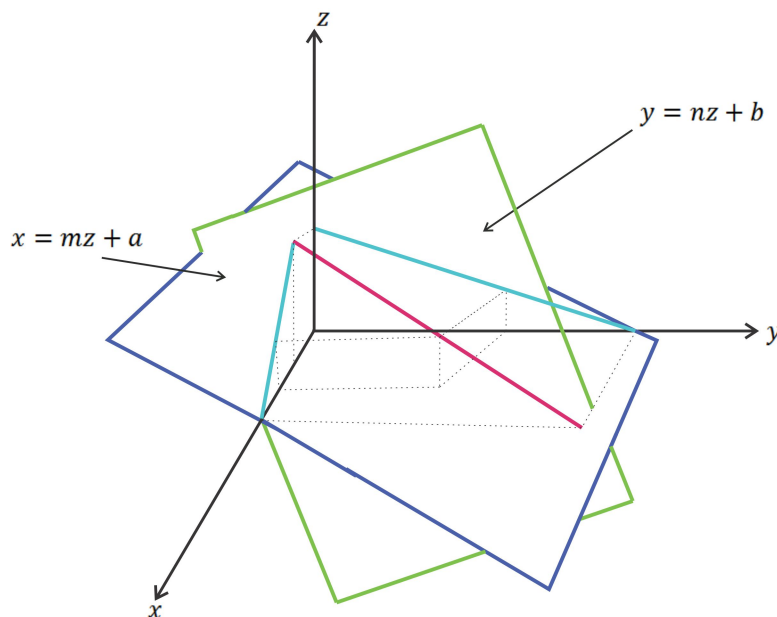


Figura 1.1: La intersección de dos planos es una línea recta L .

Proposición 1. Sea L una línea recta que pasa por dos puntos dados $P' = (x', y', z')$ y $P'' = (x'', y'', z'')$. Las ecuaciones de las proyecciones de L sobre los planos coordenados están determinadas por:

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'} \quad (1.2)$$

Demostración. Sea $P = (x, y, z)$ un punto que divide al segmento $\overline{P'P''}$, en la razón $\frac{k}{l} = \frac{P'P}{PP''}$.

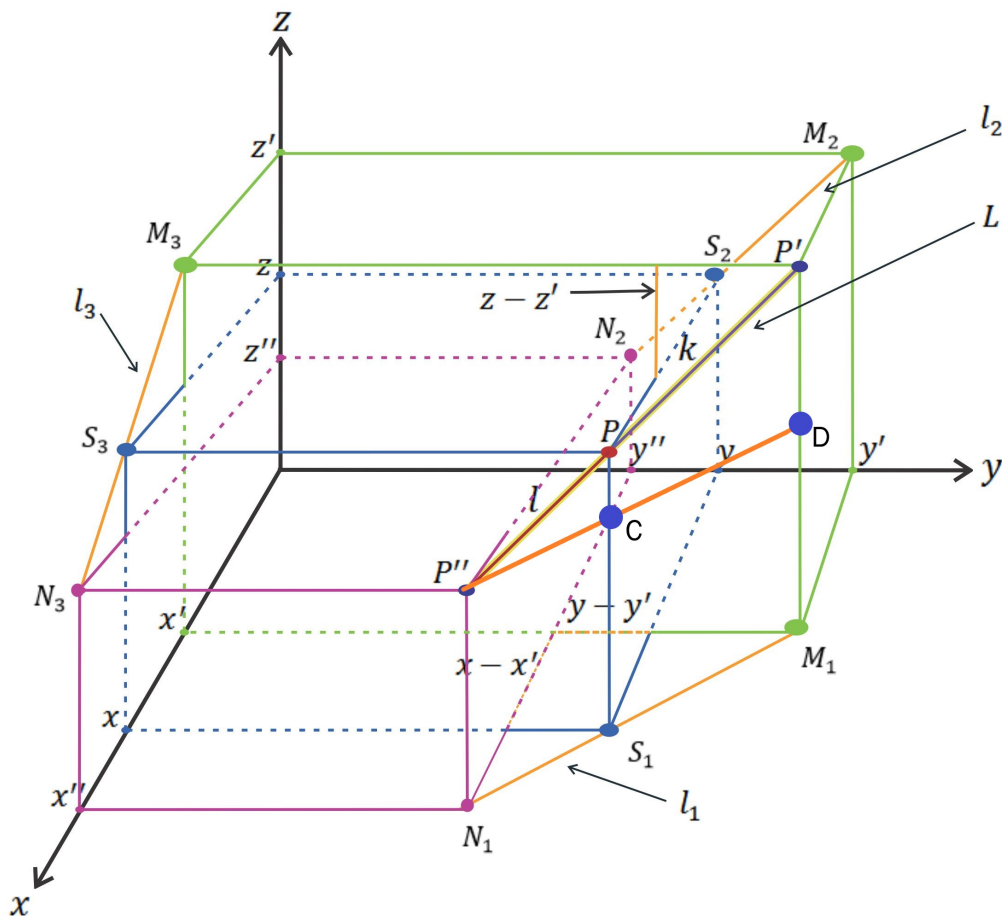


Figura 1.2: Las proyecciones l_1 , l_2 y l_3 de la recta L sobre los planos coordenados xy , yz y xz , respectivamente.

Sean l_1, l_2 y l_3 las proyecciones de la recta L sobre los planos coordenados xy , yz y xz , respectivamente. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, sean N_i, S_i y M_i las proyecciones de los puntos P'', P y P' en l_i , respectivamente.

Notemos que $\overline{P''N_i}, \overline{PS_i}, \overline{P'M_i}$ son paralelos entre sí, véase Figura 1.2. Sin pérdida de generalidad, consideremos la recta l_1 y $\overline{P''D}$ paralelo a $\overline{N_1M_1}$ donde D pertenece a $\overline{P'M_1}$, ver Figura 1.3.

Con ello $\triangle P''CP$ y $\triangle P''DP'$ tienen en común a $\angle PP''C = P'P''D$ y además son iguales los ángulos en C y D , donde C es la intersección de $\overline{P''D}$ con $\overline{PS_1}$.

Por el criterio de semejanza (ALA), los triángulos $\triangle P''CP$ y $\triangle P''DP'$ son

semejantes, y por el Teorema de Tales se tiene que $\frac{P''C}{P''P} = \frac{P''D}{P''P'}$, es decir,

$$\frac{P''D}{P''C} = \frac{P''P'}{P''P}.$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{P''P'}{P''P} = \frac{P''P + PP'}{P''P} = 1 + \frac{PP'}{P''P},$$

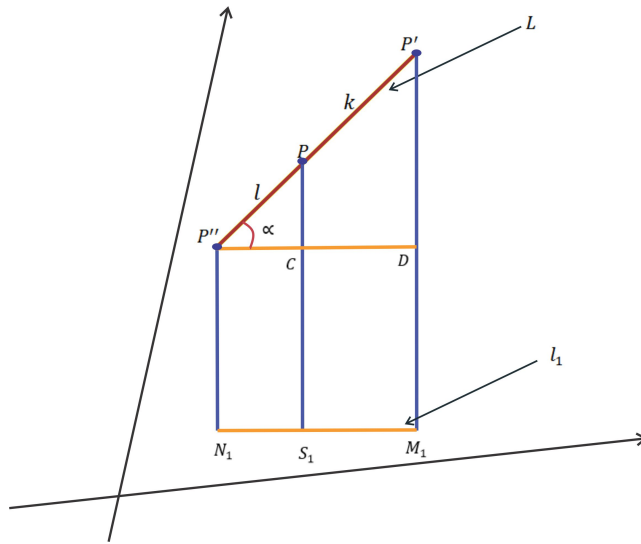


Figura 1.3: Proyección de la recta L sobre l_1 .

y

$$\frac{P''D}{P''C} = \frac{P''C + CD}{P''C} = 1 + \frac{CD}{P''C},$$

entonces

$$\frac{CD}{P''C} = \frac{PP'}{P''P} = \frac{k}{l}.$$

Como $DC = M_1S_1$ y $CP'' = N_1S_1$ se deduce que

$$\frac{P'P}{P''P} = \frac{k}{l} = \frac{M_1S_1}{S_1N_1}.$$

Así, considerando las proyecciones con respecto a cada eje coordenado podemos concluir que

$$\frac{k}{l} = \frac{x - x'}{x'' - x}, \quad \frac{k}{l} = \frac{y - y'}{y'' - y} \quad \text{y} \quad \frac{k}{l} = \frac{z - z'}{z'' - z},$$

son las ecuaciones simétricas de las proyecciones de L sobre los planos coordenados. \square

En términos generales la Proposición 1 muestra que la longitud de la proyección ortogonal de una línea recta en cualquier plano es igual a la longitud de la línea recta multiplicada por el coseno del ángulo que forma con el plano, ver Figura 1.2 y Figura 1.3, es decir, $P''D = P''P' \cos \alpha$. La demostración de la Proposición 1 puede consultarse también en [15, pág. 7] y [14, pág. 5].

Proposición 2. *Con las mismas condiciones de la Proposición 1, las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P'P''}$ en la razón $\frac{k}{l}$ son:*

$$x = \frac{lx' + kx''}{l + k}, \quad y = \frac{ly' + ky''}{l + k}, \quad z = \frac{lz' + kz''}{l + k}.$$

Demostración. Sean L la recta y P, P', P'' los puntos como en la prueba de la Proposición 1, si consideramos la recta l_3 de la demostración de la proposición anterior tenemos que

$$\frac{k}{l} = \frac{x' - x}{x - x''}$$

de esta manera

$$kx - kx'' = lx' - lx,$$

entonces

$$x(l + k) = lx' + kx''.$$

Análogamente, para las rectas l_1 y l_2 sobre los planos xy y yz , respectivamente, se obtiene:

$$y(l + k) = ly' + ky'' \quad \text{y} \quad z(l + k) = lz' + kz'',$$

Despejando x, y, z de las ecuaciones anteriores se concluye que

$$x = \frac{lx' + kx''}{l + k}, \quad y = \frac{ly' + ky''}{l + k}, \quad z = \frac{lz' + kz''}{l + k}.$$

\square

Cuando nos referimos a una recta como la intersección de dos planos, se hace énfasis en constantes independientes, como fue mostradó al principio, es decir, el número total de constantes independientes es cuatro y están dadas por (a, m, b, n) , dicho número de constantes puede aumentar si consideramos las ecuaciones de una línea recta dadas como en la Proposición 1 cuando se escriben en la forma (1.2), de tal manera que

$$\frac{x - x'}{r} = \frac{y - y'}{s} = \frac{z - z'}{t} \quad (1.3)$$

donde $r = x'' - x$, $s = y'' - y$ y $t = z'' - z$ para cualquier sistema de ejes coordenados. Notemos que x' , y' , z' ocurren en grupos que no son independientes, debido a que al considerarse todas las igualdades de la ecuación (1.2), es decir

$$\frac{x - x'}{x'' - x} = \frac{y - y'}{y'' - y}, \quad \frac{y - y'}{y'' - y} = \frac{z - z'}{z'' - z}, \quad \frac{z - z'}{z'' - z} = \frac{x - x'}{x'' - x},$$

se están involucrando a x, y y z .

De hecho, considerando los grupos de cocientes

$$\frac{x - x'}{r} = \frac{y - y'}{s}, \quad \frac{y - y'}{s} = \frac{z - z'}{t}, \quad \frac{z - z'}{t} = \frac{x - x'}{r}, \quad (1.4)$$

se obtiene

$$sz' - ty' = sz - ty, \quad tx' - rz' = tx - rz, \quad ry' - sx' = ry - sx, \quad (1.5)$$

haciendo

$$a = sz' - ty', b = tx' - rz', c = ry' - sx'. \quad (1.6)$$

Para que el número de constantes que define una recta mediante la intersección de dos planos no sea cuatro como se mencionó anteriormente, podemos considerar una relación de tal manera que las constantes dadas anteriormente (r, s, t, a, b y c) estén estrechamente conectadas en una sola ecuación que nos permita determinar una recta, dicha relación queda definida de la siguiente manera

$$ra + sb + tc = 0, \quad (1.7)$$

De las ecuaciones dadas en (1.5) y (1.6) podemos notar que son ecuaciones de una línea recta en sus correspondientes planos, veamos;

$$\begin{aligned} ty - sz + a &= 0, \\ -tx + rz + b &= 0, \\ sx - ry + c &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora queremos establecer una relación adicional de tal manera que los ejes coordenados estén asociados a los parámetros definidos anteriormente, es decir a a, b y c , para ello definimos la siguiente ecuación

$$ax + by + cz = 0, \tag{1.9}$$

de esta manera y considerando cualquier ecuación de (1.8), se reduce a dos de las cuatro ecuaciones, sin pérdida generalidad consideremos la primera ecuación de (1.8), despejando z obtenemos $z = \frac{ty + a}{s}$ y sustituyendo en la ecuación (1.9) se tiene que

$$ax + by + cz = ax + by + c \left(\frac{ty + a}{s} \right) = ax + \left(\frac{ct}{s} + b \right) y + \frac{ca}{s} = 0.$$

Así, $Ax + By + C = 0$, donde $A = a, B = \frac{ct}{s} + b$ y $C = \frac{ca}{s}$ es la ecuación de una línea recta.

Con ello tenemos seis cantidades a, b, c, r, s, t proporcionales o iguales que sirven para determinar la posición de una línea recta siempre que mantenga la relación (1.7) donde r, s, t son las coordenadas del vector $\overrightarrow{P''P}$ y a, b, c son los componentes directores o cosenos directores de este vector con respecto al origen, a estas las llamaremos *las seis coordenadas de la recta*, que también pueden consultarse en [15, pág 39].

En conclusión las seis cantidades encontradas (no todas iguales a cero) que están relacionadas por la condición (1.7), definen de forma única, una línea recta (como sus coordenadas en el sentido indicado anteriormente).

1.2. Congruencias

De acuerdo a la sección anterior comenzamos con la línea recta como una curva que contiene cuatro parámetros, si consideramos los parámetros establecidos como arbitrarios generamos todo el sistema de líneas en el espacio

tridimensional, esto puede consultarse en [16, pág. 36], en la última parte se estableció a la línea recta mediante seis coordenadas dadas por (r, s, t, a, b, c) donde cada coordenada es función de x, y, z .

Definición 3. *A todo el sistema de líneas que satisface una relación homogénea entre las seis coordenadas de una línea recta se llama complejo de líneas, dicha relación está definida de la siguiente manera:*

$$(r, s, t, a, b, c) = 0 \quad (1.10)$$

La relación (1.10) no es la ecuación de ninguna línea en el espacio, su forma particular es

$$rs' + st' + tu' + ap' + bq' + cr' = 0$$

donde (p', q', r', s', t', u') son constantes de modo que cumple una relación similar a la dada en (1.7), es decir que $p's' + q't' + r'u' = 0$ es la ecuación de una línea recta; a saber de la línea donde están seis coordenadas son (p', q', r', s', t', u') , de hecho esta relación expresa que la línea (r, s, t, a, b, c) se intersecta con esta otra línea. Dicho término fue aplicado por Plücker y puede consultarse en [15, pág 324] y [16, pág 123]

Ahora establecemos una relación homogénea doble para determinar una superficie particular con la condición de que la superficie pase a través de una curva variable determinada por dicha relación homogénea doble y cuyo movimiento está regulado por curvas de dirección fija o en este caso líneas rectas. Iniciemos considerando las coordenadas de la línea como en (1,3), aparentemente contiene tres constantes indeterminadas si consideramos todas las igualdades como en (1,4), en realidad contiene solo dos ya que nos interesan las proporciones de las cantidades $r : t : s$, al escribir las ecuaciones de la forma

$$\frac{x - x'}{z - z'} = \frac{r}{t} \quad \frac{y - y'}{z - z'} = \frac{s}{t} \quad (1.11)$$

denotamos a $\frac{r}{t}$ por p y $\frac{s}{t}$ como q de tal manera que se obtenga una relación homogénea doble de la siguiente forma:

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0 \quad y \quad f_2(x, y, z, p, q) = 0. \quad (1.12)$$

Dichas ecuaciones determinan una curva variable. Para que esta curva pueda generar una superficie particular debemos tener una correspondencia que

conecte p con q que tenga la forma $p = \phi(q)$, esta correspondencia coincide con una familia de líneas rectas o curvas fijas dadas que intersectan a la curva variable, dichos puntos de intersección son puntos en la superficie generada, ver Ejemplo 7. De acuerdo a esta relación doble damos paso a la siguiente definición la cual puede consultarse en [1, pág 5], [2, pág 1], [3, pág 470] y [12, pág 25].

Definición 4. Se llamará *Congruencia de líneas* al conjunto de curvas dado por una ecuación homogénea doble y correspondientes a todos los valores de p y q donde éstas son constantes arbitrarias, dicha ecuación esta determinada por

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1.13)$$

donde x, y, z son las coordenadas rectangulares de un punto de una de estas curvas y p, q tal que $p = \phi(q)$, son los parámetros que determinan los puntos de ésta curva, y la denotaremos por \mathcal{C} .

Definición 5. A cada línea $l \in \mathcal{C}$ se le llamará *rayo de la congruencia* \mathcal{C} .

Ejemplo 6. Consideremos la congruencia formada por las líneas rectas que intersectan una curva variable K en todas las direcciones.

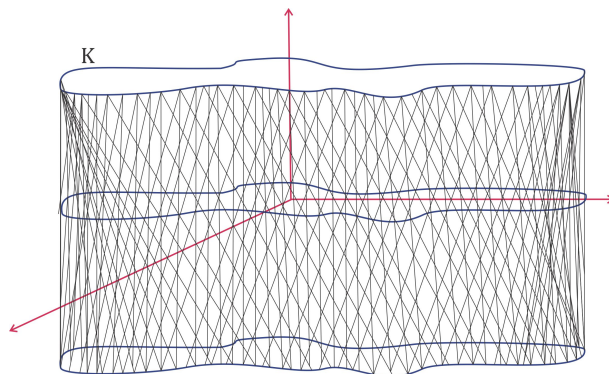


Figura 1.4: Congruencia de líneas formada por una curva K .

Ejemplo 7. Consideremos la congruencia formada por las líneas rectas que intersectan una curva K y son tangentes a una superficie S . Las líneas rectas de la congruencia que pasan por un punto M del espacio son en general un número limitado y son la frontera de dos conos con vértice en M , uno circunscrito en la superficie S y el otro que contiene a la curva K , esto también se puede consultar en [2, pág. 2], ver Figura 1.5.

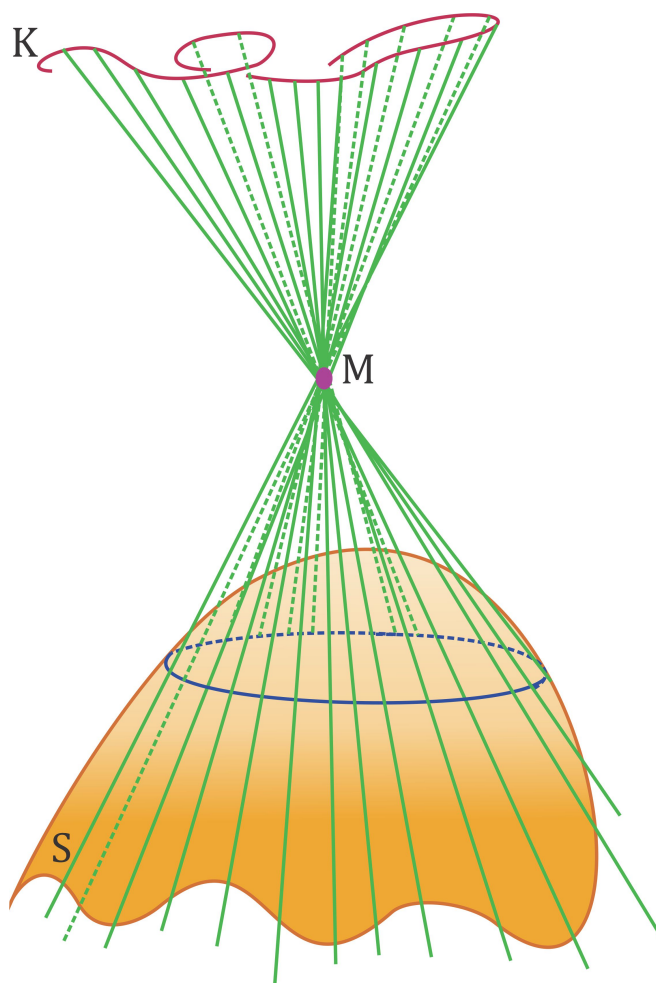


Figura 1.5: Congruencia de líneas tangentes a una superficie S .

Notemos que si en las ecuaciones dadas en (1.13) x, y, z son reemplazadas por las coordenadas del punto $M = (x_0, y_0, z_0)$, tendremos dos relaciones que determinan, en general un número finito de líneas de la congruencia, es decir, un número limitado de sistemas para los valores de p y q .

Observemos que si el punto M pertenece a la curva K , en este caso, pasarán por M una infinidad de líneas de la congruencia que formará un cono circunscrito a la superficie S que tiene su vértice en este punto, ver Figura 1.6.

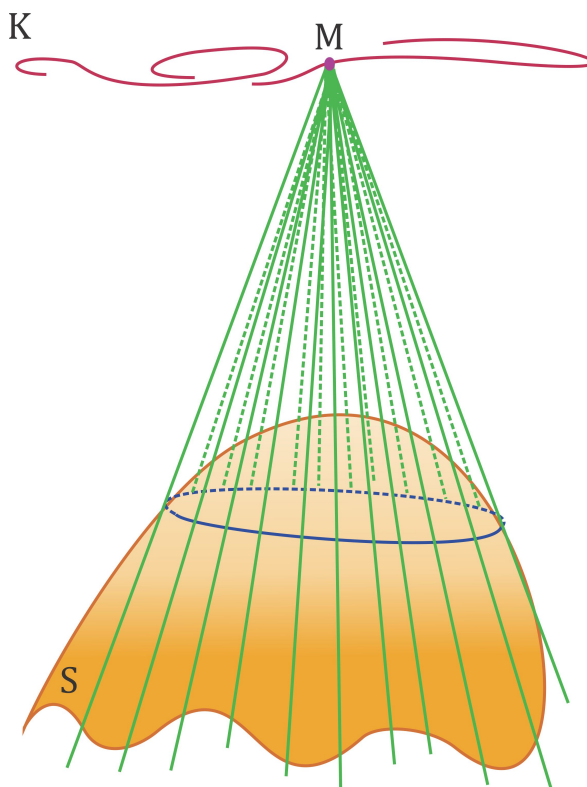


Figura 1.6: Congruencia de líneas tangentes a una superficie S y vértice sobre la curva K .

Nos interesa analizar aquella congruencia \mathcal{C} que, como conjunto de curvas fijas sean circunferencias, veamos la siguiente definición.

Definición 8. Se llama congruencia de circunferencias al conjunto $\mathcal{C}(p)$ que consiste de circunferencias en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 que pasan por dos puntos dados P_1 y P_2 , que se encuentran en el eje z y están dados por las coordenadas $(0, 0, \pm p)$ donde $p = \sqrt{q}$, para algún $q \in \mathbb{R}$.

Notemos que de la Definición 8 para dicha q tenemos varios casos:

- 1) Si $q > 0$, los puntos P_1, P_2 son reales (abusando del lenguaje) y diferentes, y la congruencia $\mathcal{C}(p)$ es llamada *elíptica*.
- 2) Si $q = 0$, los puntos P_1, P_2 coinciden (en este caso el eje z es la línea tangente de todas las circunferencias de la congruencia), y la congruencia $\mathcal{C}(p)$ es llamada *parabólica*.

3) Si $q < 0$, los puntos P_1, P_2 son imaginarios (abusando del lenguaje), la congruencia $\mathcal{C}(p)$ se llama *hiperbólica*, ver Figura 1.7.

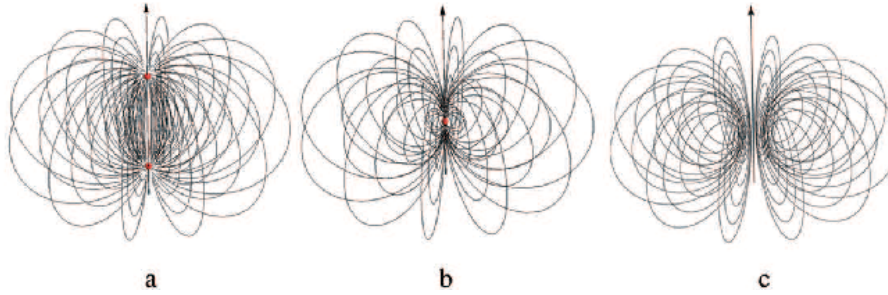


Figura 1.7: Algunas circunferencias de una congruencia elíptica, parabólica o hiperbólica $\mathcal{C}(p)$ se muestran en a, b y c, respectivamente.

Cada plano ζ a través del eje z corta a la congruencia $\mathcal{C}(p)$ en un haz de circunferencias a través de los puntos P_1 y P_2 , dicho haz es denotado por (P_1, P_2) .

Como antes, si q es mayor, igual o menor que cero, el haz será elíptico, parabólico o hiperbólico, respectivamente, ver Figura 1.8.

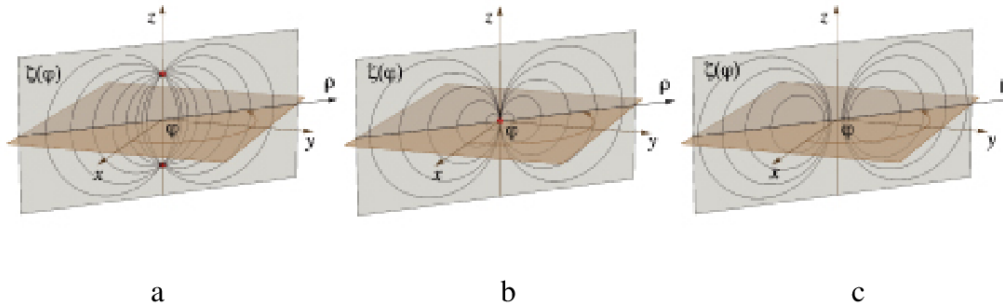


Figura 1.8: Un haz elíptico, parabólico o hiperbólico (P_1, P_2) se muestran en a, b y c, respectivamente.

Dado $\varphi \in [0, 2\pi)$ consideraremos el plano $\zeta(\varphi)$, con coordenadas ρ y z , donde φ es el ángulo entre el eje x y el plano $\zeta(\varphi)$, consideremos una circunferencia $c \in (P_1, P_2)$ en el plano $\zeta(\varphi)$, ver Figura 1.8.

Para cualquier congruencia $\mathcal{C}(p)$, la circunferencia $c \in (P_1, P_2)$ no necesariamente tiene centro en $O = (0, 0)$, lo cual se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 9. *Para todo $c \in (P_1, P_2)$ contenido en el plano $\zeta(\varphi)$ las coordenadas de su centro están dadas por $(h, 0)$.*

Demostración. Sea $c \in (P_1, P_2)$, una circunferencia con centro distinto de $(0, 0)$, ver Figura 1.8, la ecuación general de esta circunferencia es $(\rho - h)^2 + (z - k)^2 = r^2$, donde r es el radio de la circunferencia.

Dado que P_1, P_2 están dados por las coordenadas $(0, \pm p)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $P_1 = (0, p)$ y $P_2 = (0, -p)$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} h^2 + (p - k)^2 &= r^2, \\ h^2 + (-p - k)^2 &= r^2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

restando la primera y segunda ecuación de (1.14) obtenemos

$$(p - k)^2 - (-p - k)^2 = 0$$

entonces $-4pk = 0$, así $k = 0$.

Por lo tanto el centro de la circunferencia c esta dado por las coordenadas $(h, 0)$. \square

Proposición 10. *La ρ -coordenada del centro de la circunferencia $c \in (P_1, P_2)$ en el plano $\zeta(\varphi)$ está dada por $\rho = \sqrt{r^2 - p^2}$, donde r es el radio de la circunferencia c , ver Figura 1.9.*

Demostración. Por la Proposición 9 el ángulo $\angle POC$ es un ángulo recto, luego por el Teorema de Pitágoras $p^2 + \rho^2 = r^2$.

Por lo tanto $\rho = \sqrt{r^2 - p^2}$. \square

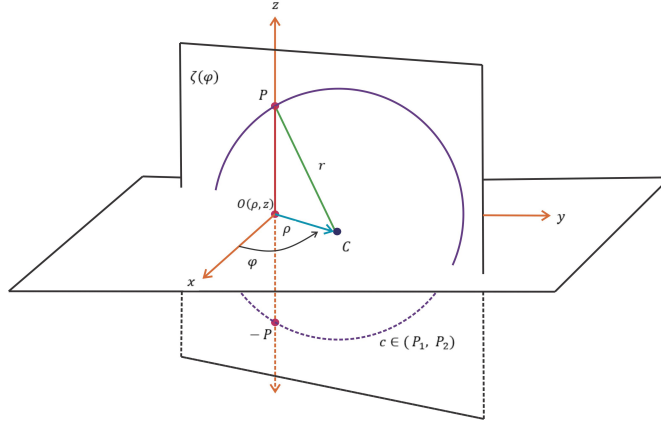


Figura 1.9: Para cada circunferencia $c \in (P_1, P_2)$ en el plano $\zeta(\varphi)$, su centro está dado por (ρ, z) .

Proposición 11. Consideremos la rotación a través del eje z del plano $\zeta(\varphi)$, dado en la Proposición 10, que contiene a la circunferencia $c \in (P_1, P_2)$. Si $P' = (x', y', z')$ entonces

$$\begin{aligned} x(\theta, r, \varphi) &= \cos \varphi (r \cos \theta + \sqrt{r^2 - p^2}), \\ y(\theta, r, \varphi) &= \sin \varphi (r \cos \theta + \sqrt{r^2 - p^2}), \\ z(\theta, r, \varphi) &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{R}^+$ para $q \leq 0$, y $r \geq p$ para $q > 0$.

Demostración. Sean $P' = (x', y', z')$ un punto arbitrario sobre la circunferencia $c \in (P_1, P_2)$ y P'' la proyección del punto P' sobre el plano xy .

1.- Para la coordenada en x .

En $\triangle CP''P'$, ver Figura 1.10:

$$\cos \theta = \frac{CP''}{CP'}, \text{ entonces } CP'' = CP' \cos \theta = r \cos \theta.$$

Como $OP'' = OC + CP''$, entonces $OP'' = \rho + r \cos \theta$.

En $\triangle Ox'P''$:

$$Ox' = OP'' \cos \varphi, \text{ entonces } Ox' = (\rho + r \cos \theta) \cos \varphi.$$

2.- Para la coordenada en y .

$$Oy' = OP'' \sin \varphi, \text{ entonces } Oy' = (\rho + r \cos \theta) \sin \varphi.$$

3.- Para la coordenada en z .

$$z' = P'P'' = CP' \operatorname{sen} \theta = r \operatorname{sen} \theta.$$

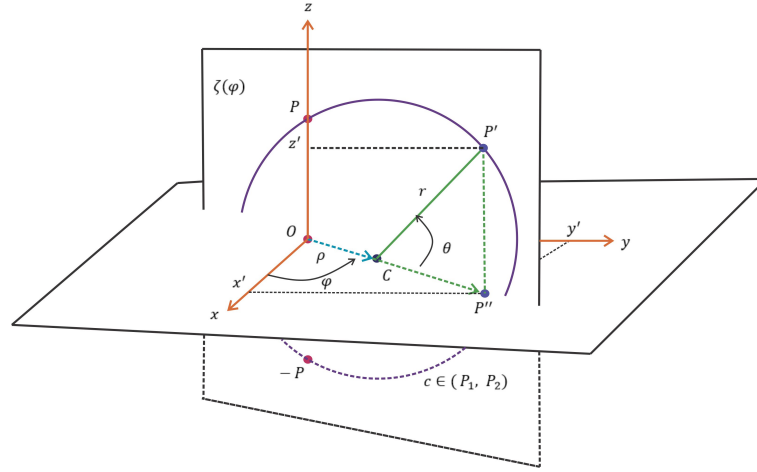


Figura 1.10: Rotación del plano $\zeta(\varphi)$ a través del eje z .

De esta manera la congruencia $\mathcal{C}(p)$ queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(\theta, r, \varphi) &= \cos \varphi (r \cos \theta + \sqrt{r^2 - p^2}), \\ y(\theta, r, \varphi) &= \operatorname{sen} \varphi (r \cos \theta + \sqrt{r^2 - p^2}), \\ z(\theta, r, \varphi) &= r \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

donde $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{R}^+$ para $q \leq 0$, y $r \geq p$ para $q > 0$. □

Por otra parte, las ecuaciones (1.15) determinan que las circunferencias de $\mathcal{C}(p)$ se encuentran en un toro $\tau(r)$, para una constante r , ver Figura 1.11.

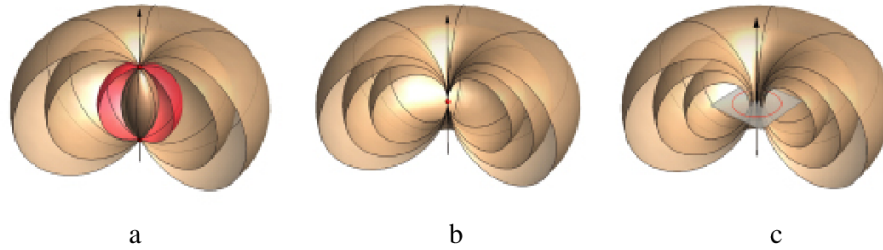


Figura 1.11: Algunos toros del sistema $\tau(r)$; para $q > 0$, $q = 0$ y $q < 0$, respectivamente.

Así mismo, para una variable r , el sistema $\tau(r)$ contiene el toro de huso, toro de cuerno o toro de anillo, si $\mathcal{C}(p)$ es una congruencia elíptica, parabólica o hiperbólica, respectivamente, ver Figura 1.12.

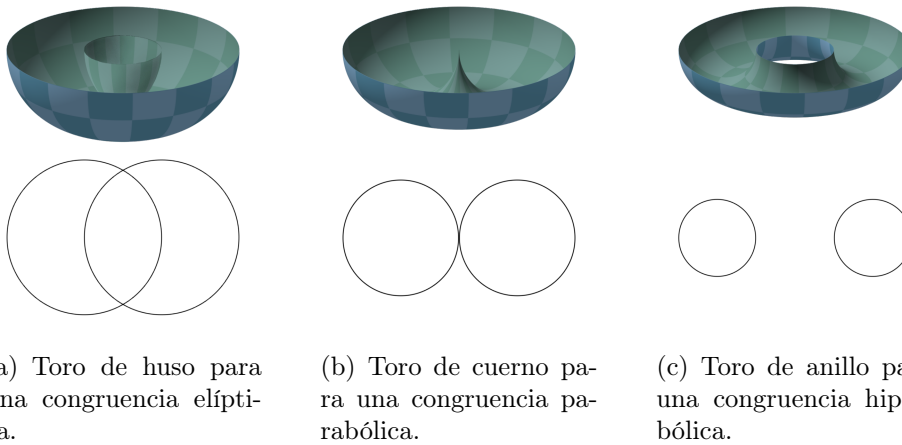


Figura 1.12: Distintos tipos de toros para el sistema $\tau(r)$ con r variable.

Para cada punto A con coordenadas cilíndricas, digamos, $A = (\rho_0, \varphi_0, z_0)$ con $\rho_0 \neq 0$, existe una única circunferencia $c^A(p) \in \mathcal{C}(p)$ que pasa a través de los puntos A , P_1 y P_2 , la ρ -coordenada del centro C de esta circunferencia, $c^A(p)$, es $\rho_c^A = \frac{\rho_0^2 + z_0^2 - p^2}{2\rho_0}$ lo cual es demostrado en la siguiente proposición,

véase la Figura 1.13.

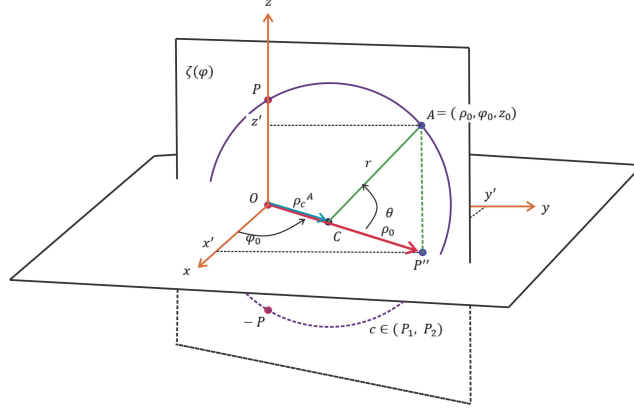


Figura 1.13: Para un punto $A \in c^A(p)$ en coordenadas cilíndricas (ρ_0, φ_0, z_0) con $\rho_0 \neq 0$, la ρ -coordenada de su centro está dada por $\rho_c^A = \frac{\rho_0^2 + z_0^2 - p^2}{2\rho_0}$.

Proposición 12. La ρ -coordenada del centro C de la circunferencia $c^A(p)$ es

$$\rho_c^A = \frac{\rho_0^2 + z_0^2 - p^2}{2\rho_0}.$$

Demostración. Del $\triangle POC$ tenemos que $r^2 = p^2 + (\rho_c^A)^2$. Por otro lado, de $\triangle ACP''$

$$\begin{aligned} r^2 &= z_0^2 + (\rho_0 - \rho_c^A)^2 \\ &= z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho_c^A + (\rho_c^A)^2. \end{aligned}$$

Entonces, $p^2 + (\rho_c^A)^2 = z_0^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho_c^A + (\rho_c^A)^2$.

Por lo tanto, $\rho_c^A = \frac{\rho_0^2 + z_0^2 - p^2}{2\rho_0}$. □

Ahora si consideramos las coordenadas cartesianas, entonces usando las ecuaciones obtenidas en (1.15), para todo $A = (x_0, y_0, z_0)$ donde $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos \varphi_0 (r \cos \theta + \rho_c^A), \\ y(\theta) &= \sen \varphi_0 (r \cos \theta + \rho_c^A), \\ z(\theta) &= r \sen \theta. \end{aligned}$$

En este caso, $\cos \varphi_0 = \frac{x_0}{\rho_0}$, $\rho_c^A = \frac{\rho_0^2 + z_0^2 - p^2}{2\rho_0}$. Como $\rho_0 = \|(x_0, y_0)\|$, $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$. Dado que $r^2 = p^2 + (\rho_c^A)^2$, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $c^A(p) \in \mathcal{C}(p)$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a_0 \left(\sqrt{4p^2(x_0^2 + y_0^2) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p^2)^2} \cos \theta + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p^2 \right), \\ y(\theta) &= b_0 \left(\sqrt{4p^2(x_0^2 + y_0^2) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p^2)^2} \cos \theta + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p^2 \right), \\ z(\theta) &= \sqrt{\frac{p^2 + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - p^2)^2}{4(x_0^2 + y_0^2)}} \operatorname{sen} \theta; \quad \theta \in [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde $a_0 = \frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}$ y $b_0 = \frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}$.

Las ecuaciones dadas en (1.16) también se pueden consultar en [9].

1.3. Superficies Circulares $\mathcal{CS}(\alpha, p)$

A partir de las congruencias dadas anteriormente vamos a dar la siguiente definición.

Definición 13. Una superficie circular $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ se define como un sistema de circunferencias de una congruencia dada $\mathcal{C}(p)$ que se intersectan con una curva dada α , ver Figura 1.14.

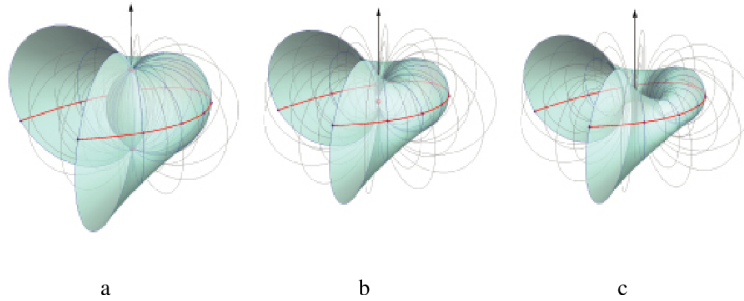


Figura 1.14: Intersección de una curva dada α , con una Congruencia elíptica, parabólica e hiperbólica

1.3.1. Ecuaciones paramétricas de $\mathcal{CS}(\alpha, p)$

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ donde α_i son funciones diferenciables sobre el intervalo I , y $\alpha_{xy}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ denota su proyección normal en el plano $z = 0$.

Si sustituimos $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ por (x_0, y_0, z_0) en la ecuación (1.16), obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas de $\mathcal{CS}(\alpha, p)$:

$$\begin{aligned} x(t, \theta) &= a_1 \left(\sqrt{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2} \cos \theta + \|\alpha(t)\|^2 - p^2 \right), \\ y(t, \theta) &= a_2 \left(\sqrt{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2} \cos \theta + \|\alpha(t)\|^2 - p^2 \right), \\ z(t, \theta) &= \sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\| - p^2)^2}{4\|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \sin \theta, \quad (t, \theta) \in I \times [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde $a_1 = \frac{\alpha_1(t)}{2\|\alpha_{xy}(t)\|^2}$ y $a_2 = \frac{\alpha_2(t)}{2\|\alpha_{xy}(t)\|^2}$.

Las ecuaciones anteriores podemos escribirlas en términos de una sola ecuación definida como sigue;

$$\mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) = (x(t, \theta), y(t, \theta), z(t, \theta)).$$

Sustituyendo las ecuaciones dadas en (1.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) &= \frac{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} \left(\sqrt{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2} \cdot \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha(t)\|^2 - p^2 \right) + \left(\sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4 \|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \right) \sin \theta \cdot (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) &= \frac{\|\alpha(t)\|^2 - p^2}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) \\ &+ \left(\sqrt{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2} \right) \frac{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} \cdot \cos \theta \\ &+ \left(\sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4 \|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \right) \sin \theta \cdot (0, 0, 1) \end{aligned}$$

desarrollando el término $\frac{1}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} = \frac{1}{2 \|\alpha_{xy}(t)\| \cdot \|\alpha_{xy}(t)\|}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) &= \frac{\|\alpha(t)\|^2 - p^2}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) \\ &+ \left(\frac{\sqrt{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|} \right) \cos \theta \frac{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)}{\|\alpha_{xy}(t)\|} \\ &+ \sin \theta \cdot (0, 0, 1) \left(\sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4 \|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \right) \end{aligned}$$

realizando un par de cálculos más, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) &= \frac{\|\alpha(t)\|^2 - p^2}{2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2} \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) \\ &+ \left(\sqrt{\frac{4p^2 \|\alpha_{xy}(t)\|^2 + (\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4 \|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \right) \cos \theta \cdot \frac{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)}{\|\alpha_{xy}(t)\|} \\ &+ \sin \theta \cdot (0, 0, 1) \left(\sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4 \|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \right) \end{aligned}$$

Factorizando el término $\sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4\|\alpha_{xy}(t)\|^2}}$ obtenemos

$$\mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) = \frac{\|\alpha(t)\|^2 - p^2}{2\|\alpha_{xy}(t)\|^2} \cdot (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) + \sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4\|\alpha_{xy}(t)\|^2}} \left(\cos \theta \cdot \frac{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)}{\|\alpha_{xy}(t)\|} + \sin \theta \cdot (0, 0, 1) \right).$$

Finalmente,

$$\mathcal{CS}^{\alpha p}(t, \theta) = \gamma^{\alpha p}(t) + r^{\alpha p}(t)(\cos \theta \mathbf{a}_1^{\alpha p}(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2^{\alpha p}(t)), \quad (1.18)$$

donde

$$\gamma^{\alpha p}(t) = \frac{\|\alpha(t)\|^2 - p^2}{2\|\alpha_{xy}(t)\|^2} \alpha_{xy}(t), \quad \mathbf{a}_1^{\alpha p}(t) = \frac{\alpha_{xy}(t)}{\|\alpha_{xy}(t)\|},$$

$$r^{\alpha p}(t) = \sqrt{p^2 + \frac{(\|\alpha(t)\|^2 - p^2)^2}{4\|\alpha_{xy}(t)\|^2}}, \quad \mathbf{a}_2^{\alpha p}(t) = (0, 0, 1).$$

Con respecto a la ecuación (1.18) en [9], nos indica que pueden ser mostradas numerosas visualizaciones de superficies circulares $\mathcal{CS}(\alpha, p)$, de manera más general puede verse de la forma:

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + r(t)(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t)) \quad (1.19)$$

donde $V : I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ finalmente $r : I \rightarrow \mathbb{R}^+$.

También se supone que $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 0$ para todo $t \in I$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto en \mathbb{R}^3 .

La curva γ es llamada *curva base* la cual consta de todos los centros de las circunferencias de la superficie circular, dados por $r(t)(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$ y finalmente el par de curvas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ es llamado *marco director* o *marco de dirección*, para más detalles puede consultarse [9], [10] y [11].

Ejemplo 14. Consideremos la superficie circular $\mathcal{CS}(\alpha, p)$, ver Figura 1.15, con $p = 4, 0, 4i$, donde la curva α esta dada por

$$\alpha(t) = \left(9 \cos t - 4 \cos \frac{9t}{2}, 9 \sin t - 4 \cos \frac{9t}{2}, 0 \right).$$

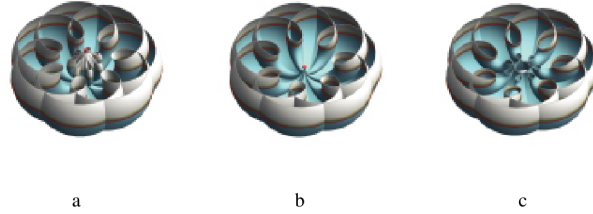


Figura 1.15: La superficie circular $\mathcal{CS}(\alpha, p)$, con $\alpha(t) = (9 \cos t - 4 \cos \frac{9t}{2}, 9 \sin t - 4 \cos \frac{9t}{2}, 0)$ y para cada congruencia dada $\mathcal{C}(p)$ donde $p = 4, 0, 4i$.

En este trabajo nos interesa analizar superficies como la mostrada en la Figura 1.15, es decir, cuando α es un cíclico armónico y de manera más particular cuando α es una rosa. La construcción de dichas curvas se da en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Curvas cíclicas armónicas

En este capítulo mostramos la construcción y clasificación de las curvas cíclicas armónicas que se dan al considerar un movimiento rotatorio armónico a partir de un par de movimientos más, uno de ellos, el más importante denominado movimiento armónico simple el cual se explica a continuación.

2.1. Movimiento armónico simple

Construcción

Iniciemos considerando un resorte en estado de reposo, ver Figura 2.1, sin embargo, si le agregamos una masa m y lo estiramos hasta un punto A aquí empieza a actuar una fuerza restauradora dada por la ley de elasticidad de Hooke, $F = -kx$ donde k es una constante que depende del resorte, multiplicado por la posición en la que se encuentra la masa. La fuerza restauradora provoca que la masa se acelere a la izquierda es decir que el resorte se regrese hasta llegar a $-A$, comprimiéndose y tratando de regresar nuevamente a la posición inicial.

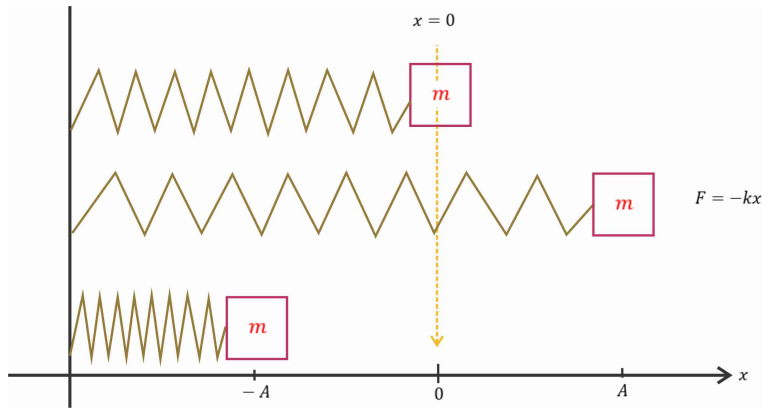


Figura 2.1: Ley de elasticidad o ley de Hooke.

Lo que queremos hacer es dar una idea intuitiva de la posición de la masa en función del tiempo t . Para esto vamos a hacer una gráfica, ver Figura 2.2, por conveniencia vamos a considerar al tiempo como variable independiente y x como la posición (x está en función del tiempo).

Los puntos que se muestran en la Figura 2.2 los describiremos a continuación. Lo que hicimos fue colocar la masa en el punto A , regresar a $-A$, para posteriormente regresar a su posición inicial A . El tiempo total T que tarda la masa en regresar a su posición inicial es el periodo del resorte.

En este sentido notemos que:

1. En el tiempo $T = 0$ la masa está en el punto A .
2. En el tiempo total T la masa también está en A .
3. En $\frac{T}{2}$ la masa llega a $-A$.
4. En $\frac{T}{4}$ pasa por el 0.
5. En $\frac{3T}{4}$ pasa por el 0.

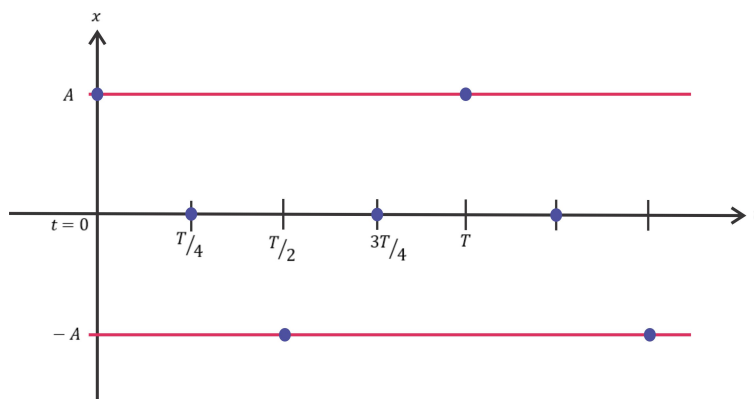


Figura 2.2: Algunos puntos de la gráfica de la función de posición de la masa.

Ya tenemos algunos puntos sobre la gráfica de la función que nos interesa, dichos puntos no se pueden unir por una línea recta pues estaríamos diciendo que tiene una pendiente constante, o bien, en una interpretación física estaríamos diciendo que la masa tiene una velocidad constante lo cual no necesariamente es cierto, pues al iniciar, su velocidad es 0, luego la aceleración causada por la fuerza hace que aumente, después que disminuya y así sucesivamente con lo cual no necesariamente tiene velocidad constante y no necesariamente esta gráfica tiene forma de zigzag.

Si observamos la gráfica de la función esta corresponde a una función trigonométrica en este caso a la función coseno, ver Figura 2.3, pues al principio la función coseno no es cero, de esta manera podemos ajustarla, es decir, $x(t)$ puede estar determinada por $x(t) = A \cos(\omega t)$.

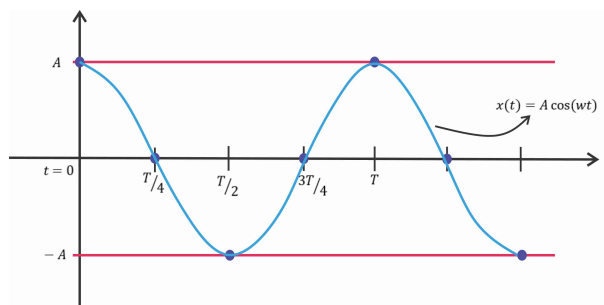


Figura 2.3: Función determinada por el movimiento del resorte.

Para ver si la gráfica de la función corresponde a la establecida antes, hacemos un poco de cálculo.

La ley de Hooke suele reescribirse cambiando F por el producto de la masa con la aceleración, es decir,

$$\begin{aligned} F &= -kx, \\ ma &= -kx(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde m es la masa, a la aceleración, k es una constante que depende del resorte y $x(t)$ es la posición en la que se encuentra la masa, la cual es una función que depende del tiempo t .

Como a es la única variable desconocida, vamos a determinar a a en términos del tiempo, para eso hagamos $\rho = x(t)$, para pasar de la posición a la aceleración necesitamos la velocidad, que se obtiene derivando la posición, así

$$v = x'(t). \quad (2.2)$$

Como la aceleración determina como cambia la velocidad, tenemos que

$$a = x''(t). \quad (2.3)$$

Así, sustituimos (2.3) en (2.1) y obtenemos

$$mx''(t) + kx(t) = 0. \quad (2.4)$$

Observemos que (2.4) es una ecuación diferencial homogénea, cuya solución esta dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t). \quad (2.5)$$

Como podemos observar la ecuación obtenida difiere un poco con la función propuesta al inicio como $x(t) = A \cos(\omega t)$, pero no es así, veamos la siguiente proposición.

Proposición 15. *La ecuación $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ con valores $c_1 = A \cos(\varphi)$ y $c_2 = A \sin(-\varphi)$ se puede escribir en la forma $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ (φ depende de la posición inicial del resorte al agregar la masa).*

Demostración. Consideremos la ecuación $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ con valores $c_1 = A \cos(\varphi)$ y $c_2 = A \sin(-\varphi)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\
&= A \cos(\varphi) \cos(\omega t) + A \sin(-\varphi) \sin(\omega t) \\
&= A \cos(\varphi) \cos(\omega t) - A \sin(\varphi) \sin(\omega t) \\
&= A(\cos(\varphi) \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)) \\
&= A \cos(\omega t + \varphi).
\end{aligned}$$

□

Definición 16. *La forma de representar el movimiento de un resorte al ser agregada una masa m se llama movimiento armónico simple y se expresa por la ecuación $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.*

Cada una de las constantes de esta ecuación tiene un significado físico del movimiento, como vimos en la Figura 2.1, A es la amplitud (es el desplazamiento máximo desde el estado de reposo), ω representa la frecuencia angular la cual está dada por $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (cambio de ángulo entre cambio de tiempo), en este caso $\omega = \frac{2\pi}{T}$, y también puede verse como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pues verificando que $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ cumple la ecuación (2.4) se tiene

$$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t),$$

$$x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t),$$

sustituyendo $x''(t)$ en la ecuación (2.4) obtenemos $m \cdot (-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)) = -k \cdot (A \cos(\omega t + \varphi))$ $m\omega^2 = k$. Así, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, con k, m conocidas. Finalmente, φ depende de la fase inicial, es decir, la posición en la que la masa esta agregada al resorte en el tiempo $t = 0$ pero que no necesariamente se encuentra en el máximo desplazamiento del resorte, véase Figura 2.4, para mayor información consúltese [21], [22] y [23].

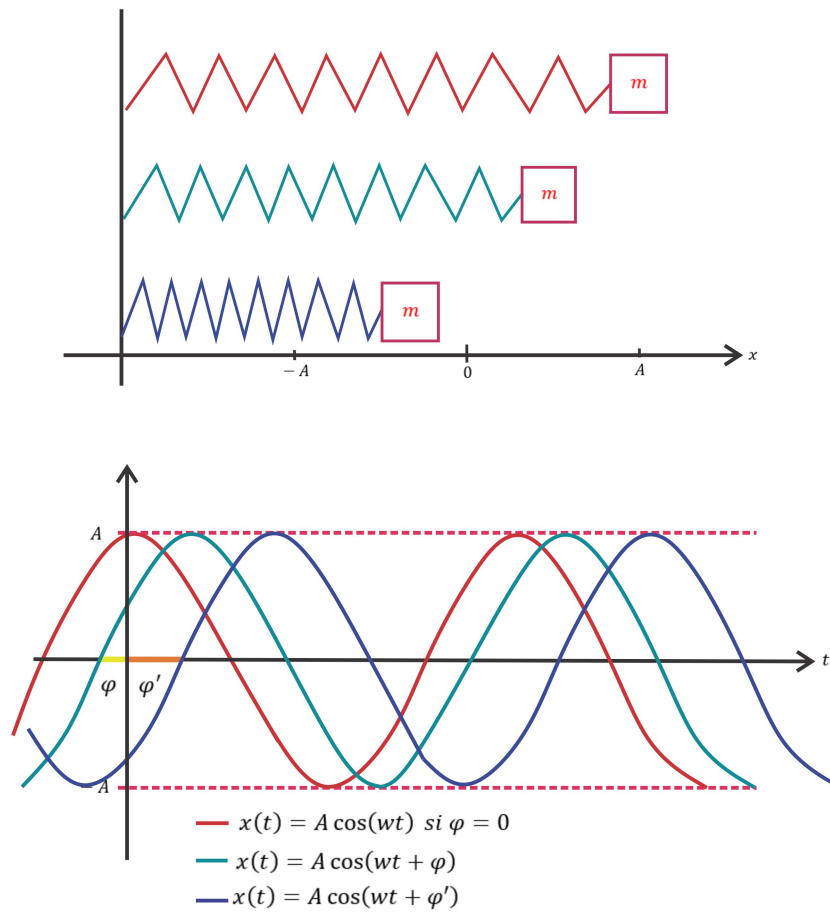


Figura 2.4: Gráfica de la posición dependiendo del ángulo de desfase.

La parte importante de este movimiento, que nos interesa analizar, es la interpretación geométrica que daremos a continuación.

Interpretación geométrica

Definición 17. Si una partícula se mueve con una velocidad uniforme a lo largo de una circunferencia, entonces el movimiento en línea recta del pie de la perpendicular desde la posición de la partícula sobre el diámetro de la circunferencia en el eje x , se llama movimiento armónico simple, ver Figura 2.5, y se expresa como antes, por la ecuación $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

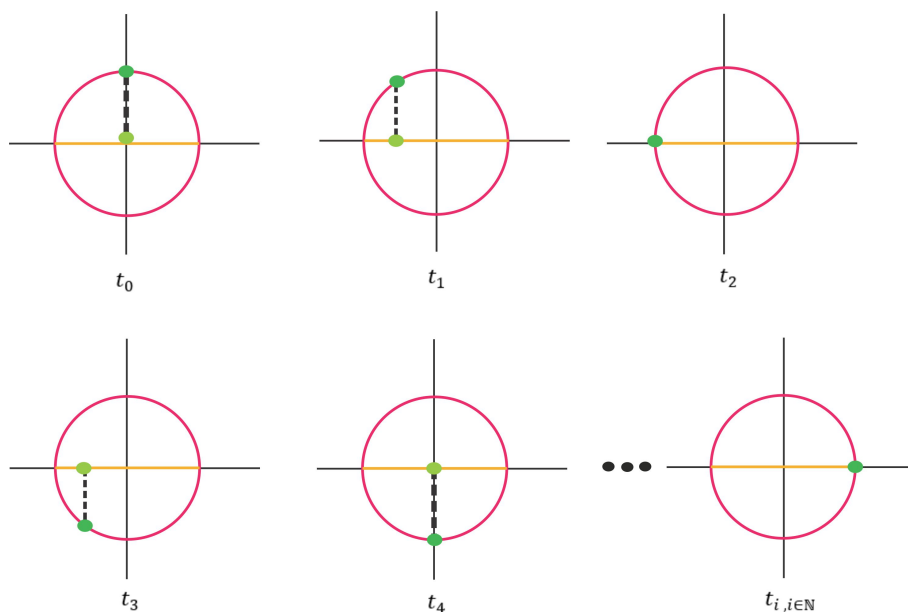


Figura 2.5: Interpretación geométrica del movimiento armónico simple.

Definición 18. Llamaremos *movimiento rotatorio armónico* a la composición de dos movimientos dados por las siguientes ecuaciones paramétricas en coordenadas polares, tomadas simultáneamente,

$$\begin{aligned} \rho &= a \cos(pt + k), \\ \theta &= qt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La primera ecuación representa un movimiento armónico simple, es decir, es el movimiento de un punto que tiene movimiento armónico simple a lo largo de una línea, ver Definición 17.

La segunda ecuación representa un movimiento angular (rotatorio) uniforme, el cual representa que la misma línea dada en la ecuación anterior, en el mismo tiempo t , gira con una velocidad angular constante q aproximadamente en uno de sus puntos fijos.

El lugar de este movimiento rotatorio armónico es la curva cíclica armónica

$$\rho(\theta) = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) + k, \text{ ver Figura 2.6.}$$

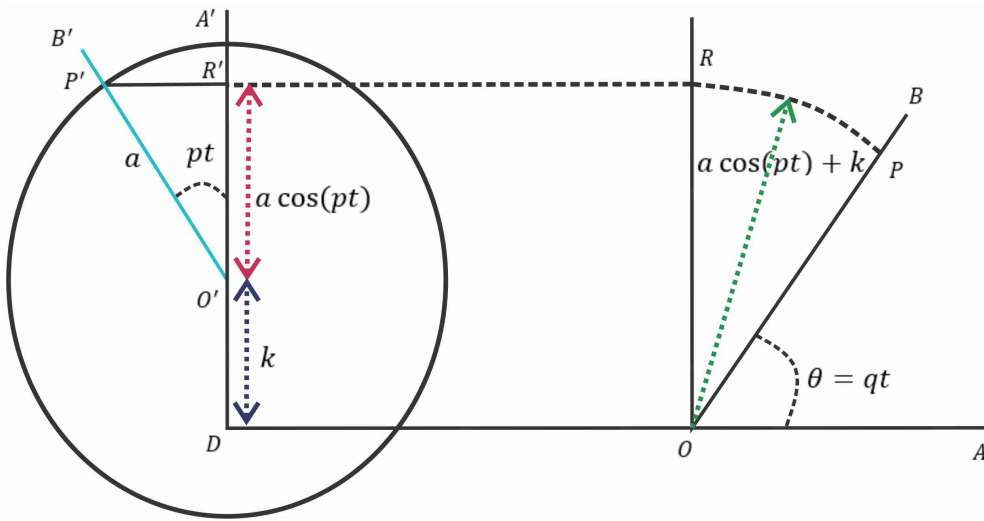


Figura 2.6: Método para construir cualquier curva cíclica armónica.

2.2. Construcción y clasificación de las curvas cíclicas armónicas

Definición 19. Una curva cíclica armónica es dada por la ecuación polar

$$\rho(\theta) = a \cos \frac{p}{q} \theta + k, \quad \theta \in [0, 2q\pi] \quad (2.7)$$

donde $\frac{p}{q}$ es un número racional positivo y $a, k \in \mathbb{R}^+$.

Construcción

En la Figura 2.6, O representa el origen de coordenadas, y \overleftrightarrow{OA} la línea inicial.

En un punto D elegido a cualquier distancia conveniente de O en \overleftrightarrow{OA} , construyamos $\overline{DA'}$ una perpendicular a \overleftrightarrow{OA} y tomemos DO' igual a k . Llamemos θ y θ' a $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$, respectivamente tal que dicha medida angular sea qt y pt , respectivamente, considerando a t como un número entero arbitrario.

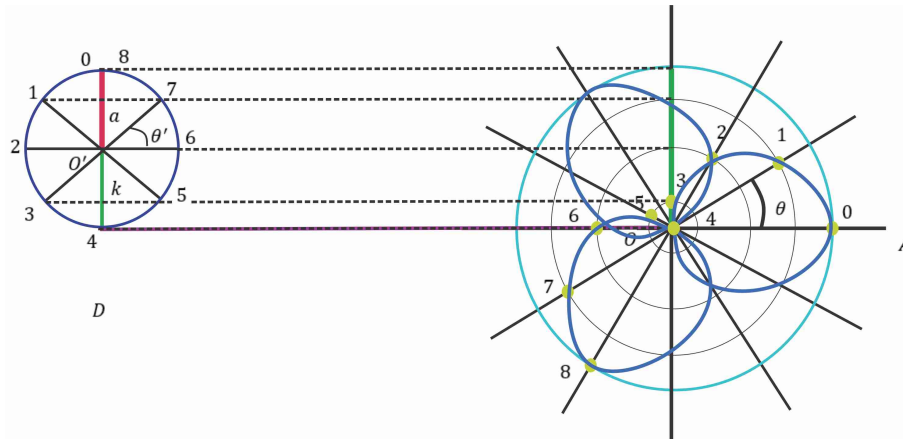


Figura 2.8: Cíclico armónico cuspidado $k = a$.

La Figura 2.8 consta de hojas que se encuentran en un punto en el centro, el diámetro de cada hoja es $k + a$.

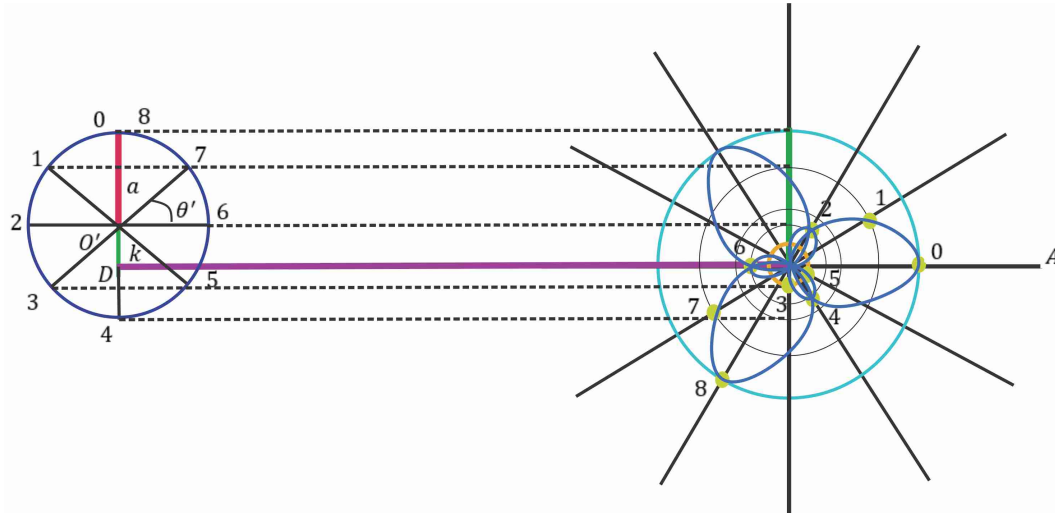


Figura 2.9: Cíclico armónico ovalado $k < a$.

La Figura 2.9 consta de dos conjuntos de hojas, siendo $k + a$ los diámetros del conjunto más grande y $k - a$ los del conjunto más pequeño.

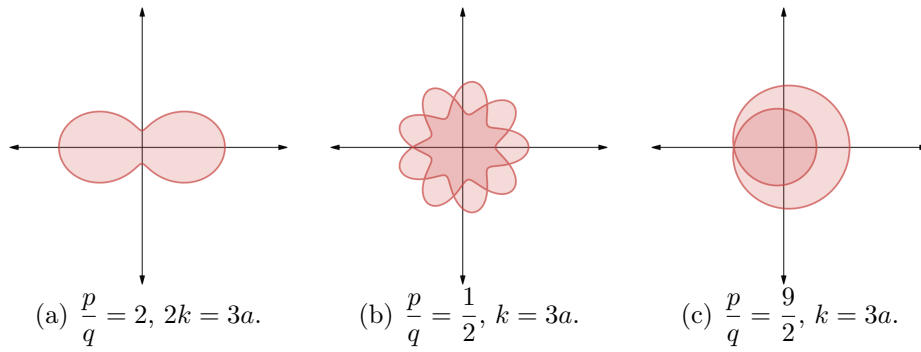


Figura 2.11: $k > a$, cíclico armónico cortado.

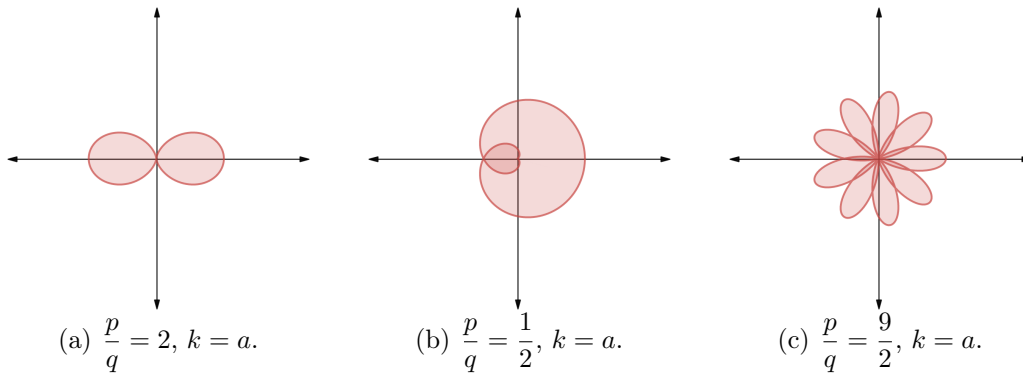


Figura 2.12: $k = a$, cíclico armónico cuspidado.

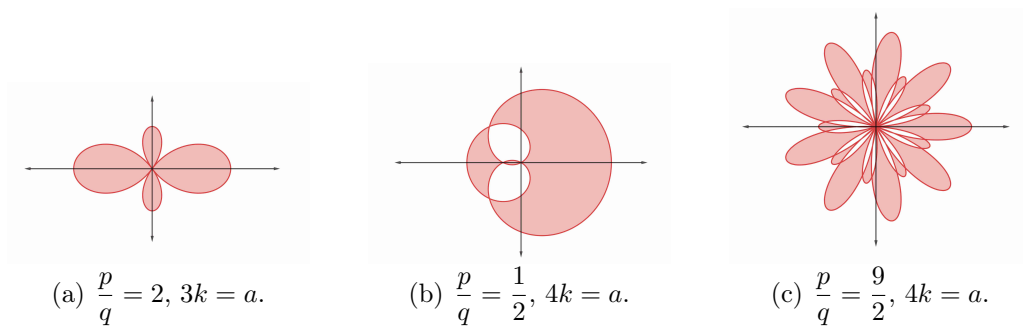
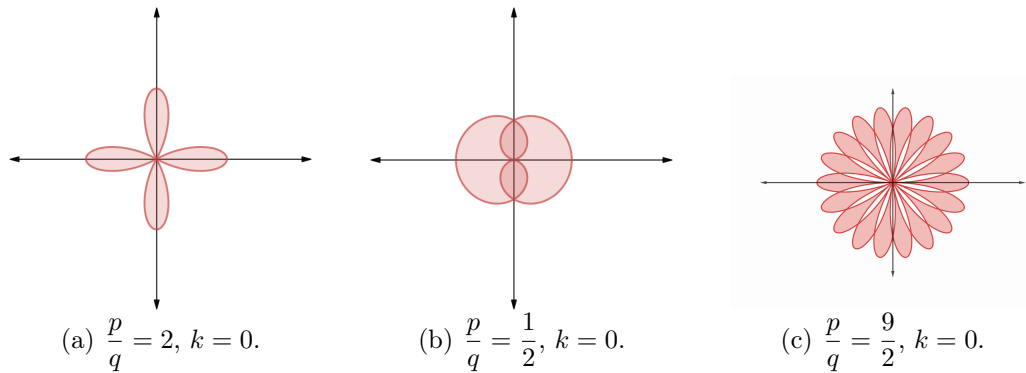


Figura 2.13: $k < a$, cíclico armónico ovalado.

Figura 2.14: $k = a$, cíclico armónico foliado.

2.3. Curvas tipo rosa

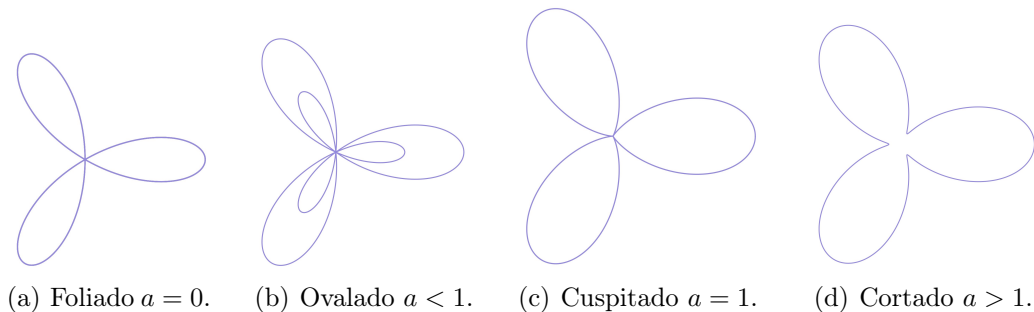
Las curvas cíclicas armónicas foliadas son las curvas tipo rosa, curvas que nos interesa analizar a fondo, y que en esta sección detallamos.

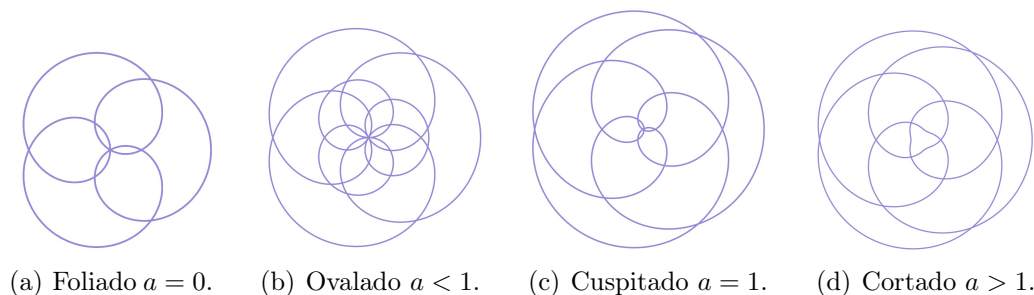
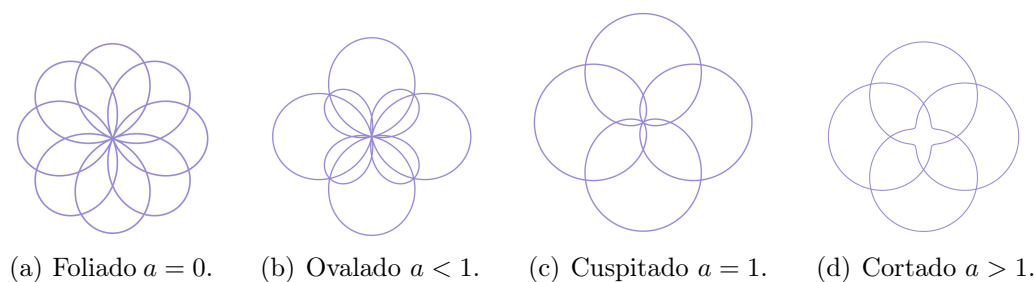
La ecuación (2.7) podemos reescribirla como $r = b \cos \frac{n}{d} \varphi + a$ de aquí en adelante asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $b = 1$ obteniendo la ecuación

$$r = \cos \frac{n}{d} \varphi + a, \quad (2.8)$$

a dicha curva cíclica armónica la denotaremos por $CH(n, d, a)$.

La ecuación dada en (2.8) también puede consultarse en [10], [11]. Algunos ejemplos de $CH(n, d, a)$ para a variable, se muestran a continuación.

Figura 2.15: $n = 3$ y $d = 1.$

Figura 2.16: $n = 3$ y $d = 5$.Figura 2.17: $n = 4$ y $d = 3$.

En las Figuras 2.15, 2.16 y 2.17 se muestran más curvas cíclicas armónicas con el parámetro a variable, es decir, para valores mayores o iguales a 0 con su correspondiente clasificación.

Aquí, sólo analizaremos cuando $a = 0$, veamos la siguiente definición.

Definición 21. Las curvas $CH(n, d, 0)$, también denotadas como $R(n, d)$ se llaman rosas o curvas de rhodonea, y son dadas por la ecuación polar

$$r = \cos \frac{n}{d} \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi ds] \quad (2.9)$$

donde $\frac{n}{d}$ es un número racional positivo en su forma más simple, es decir, tanto su numerador como su denominador no tienen divisores comunes distintos de 1 y $s \in \{1, 2\}$, véase [4] y [10].

Debido a que la razón $\frac{n}{d}$ determina el tipo de curva consideremos dos casos:

- 1) Si $n \cdot d$ es impar, entonces $s = 1$.
- 2) Si $n \cdot d$ es par, entonces $s = 2$.

De acuerdo a la definición anterior consideremos las siguientes observaciones.

Observación 22. Si $n \cdot d$ es impar, entonces las curvas se cierran en ángulos polares $d \cdot \pi$, tiene n pétalos, con un n -ple punto en el origen y $\frac{n(d-1)}{2}$ puntos dobles, donde un punto doble son dos puntos coincidentes a través de la curva que se intersectan.

Observación 23. Si $n \cdot d$ es par, entonces las curvas se cierran en ángulos polares $2 \cdot d \cdot \pi$, tiene $2 \cdot n$ pétalos, con un n -ple punto en el origen y con $2n(d-1)$ puntos dobles.

De acuerdo a las observaciones anteriores, veamos algunos ejemplos. Las Figuras 2.18 y 2.19 muestran el caso donde $n \cdot d$ es impar.

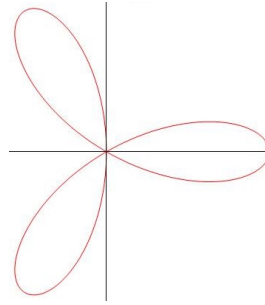


Figura 2.18: $d = 1$ y $n = 3$.

En la Figura 2.18, observemos que $n \cdot d = 3$ es impar, por lo que la curva se cierra en un ángulo polar π y tiene 3 pétalos, con un triple punto en el origen y con 0 puntos dobles.

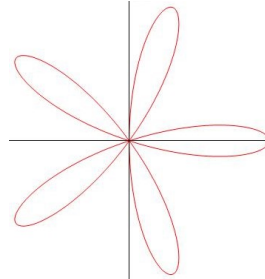


Figura 2.19: $d = 1$ y $n = 5$.

En la Figura 2.19, observemos que $n \cdot d = 5$ es impar, por lo que la curva se cierra en un ángulo polar π y tiene 5 pétalos, con un quíntuple punto en el origen y con 0 puntos dobles.

Las Figuras 2.20 y 2.21 muestran el caso donde $n \cdot d$ es par.

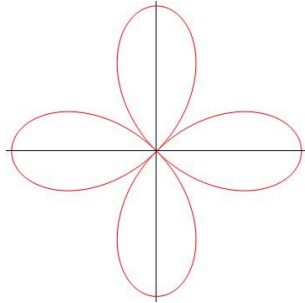


Figura 2.20: $d = 1$ y $n = 2$.

En la Figura 2.20, observemos que $n \cdot d = 2$ es par, por lo que la curva se cierra en un ángulo polar 2π y tiene 4 pétalos, con un cuádruple punto en el origen y con 0 puntos dobles.

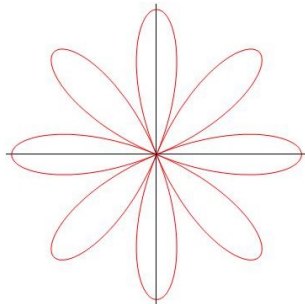
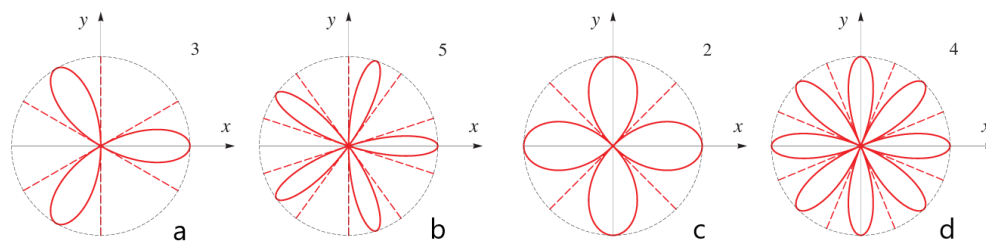
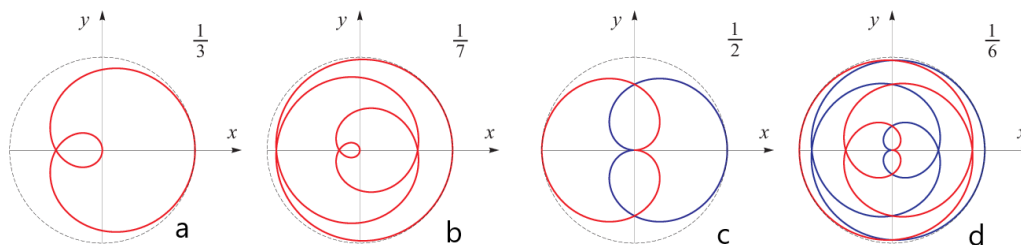


Figura 2.21: $d = 1$ y $n = 4$.

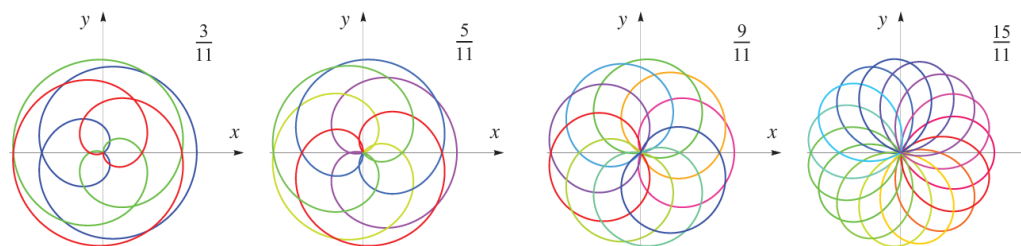
En la Figura 2.21, observemos que $n \cdot d = 4$ es par, entonces la curva se cierra en un ángulo polar 2π y tiene 8 pétalos, con un óctuple punto en el origen y con 0 puntos dobles.

Figura 2.22: Rosas $R(n, 1)$.

Otras características se tienen si n es impar, la rosa $R(n, 1)$ es una curva n -petalada con n líneas tangentes en el origen, ver imágenes *a* y *b* de la Figura 2.22. Si n es par, la rosa $R(n, 1)$ es una curva $2n$ -petalada con n líneas dobles tangentes en el origen, ver imágenes *c* y *d* de la Figura 2.22.

Figura 2.23: Rosas $R(1, d)$.

Una característica más es que si d es impar, la rosa $R(1, d)$ tiene únicamente un pétalo, ver imágenes *a* y *b* de la Figura 2.23. Si d es par, la rosa $R(1, d)$ tiene dos pétalos, ver imágenes *c* y *d* de la Figura 2.23, donde el número de puntos dobles es 1, 3, 2 y 10, respectivamente.

Figura 2.24: Rosas $R(n, 11)$.

La Figura 2.24 muestra 4 rosas con pétalos en diferentes colores dadas por $R(n, 11)$, para n con valores 3, 5, 9 y 15, respectivamente, con 25, 45, 75 y 165 puntos dobles, respectivamente.

De acuerdo a las características dadas anteriormente obtenemos como resumen el Cuadro 2.1.

$n \cdot d$	periodo	núm. pétalos	punto en O	núm. puntos dobles
impar	$d \cdot \pi$	n	n -ple	$\frac{1}{2}n(d-1)$
par	$2d \cdot \pi$	$2n$	$2n$ -ple	$2n(d-1)$

Cuadro 2.1: Propiedades de $R(n, d)$.

Debido a que la construcción de cualquier tipo de rosa suele ser un poco laboriosa, podemos obtener la ecuación implícita de las rosas para acortar el trabajo y tener una mejor visualización, la cual damos en la siguiente proposición.

Proposición 24. *Las rosas o curvas de rhodonea $R(n, d)$ están dadas por la siguiente ecuación implícita*

$$\left(\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2)^A \right)^s - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} \right)^s = 0 \quad (2.10)$$

donde $A = \frac{n+d}{2} - k + j$ y $s = 1$ si $n \cdot d$ es impar, o $s = 2$ si $n \cdot d$ es par.

Demostración. Como $\cos(n\varphi) = \cos(d\frac{n}{d}\varphi)$, de la fórmula del ángulo múltiple para el coseno, véase [20];

$$\cos n\varphi = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} (\operatorname{sen} \varphi)^{2i} (\cos \varphi)^{n-2i}.$$

Obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \binom{d}{2k} \left(\operatorname{sen} \frac{n}{d}\varphi \right)^{2k} \left(\cos \frac{n}{d}\varphi \right)^{d-2k} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} (\operatorname{sen} \varphi)^{2i} (\cos \varphi)^{n-2i}. \quad (2.11)$$

Como x, y están dadas por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{sen} \varphi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sustituyendo r en la ecuación (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \operatorname{sen} \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

sustituyendo nuevamente a r pero ahora en la ecuación (2.9), se tiene que $\cos \frac{n}{d}\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De la identidad trigonométrica $\cos^2 \frac{n}{d}\varphi + \operatorname{sen}^2 \frac{n}{d}\varphi = 1$ despejamos a $\operatorname{sen} \varphi$ teniendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{n}{d}\varphi &= \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \\ \cos \frac{n}{d}\varphi &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sustituimos las ecuaciones (2.13) y (2.14) en la ecuación (2.11) obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \binom{d}{2k} (\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})^{2k} (\sqrt{x^2 + y^2})^{d-2k} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^{2i} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^{n-2i}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \binom{d}{2k} (1 - (x^2 + y^2))^k (\sqrt{x^2 + y^2})^{d-2k} (\sqrt{x^2 + y^2})^n \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} (y)^{2i} (x)^{n-2i}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \binom{d}{2k} (1 - (x^2 + y^2))^k (\sqrt{x^2 + y^2})^{d+n-2k} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} (x)^{n-2i} (y)^{2i}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \binom{d}{2k} (1 - (x^2 + y^2))^k (x^2 + y^2)^{\frac{d+n}{2}-k} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} (x)^{n-2i} (y)^{2i}, \end{aligned}$$

aplicando el Teorema del binomio a $(1 - (x^2 + y^2))^k$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2)^{\frac{n+d}{2}-k+j} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}, \end{aligned}$$

elevamos la ecuación anterior a la potencia s para obtener

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2)^{\frac{n+d}{2}-k+j} \right)^s \\ = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} \right)^s. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2)^{\frac{n+d}{2}-k+j} \right)^s \\ - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} \right)^s = 0 \end{aligned}$$

para $s = 1$ si $n \cdot d$ es impar y $s = 2$ si $n \cdot d$ es par. \square

Ejemplo 25. Para $n = 3$ y $d = 1$, $n \cdot d$ es impar y $s = 1$. Entonces,

$$\left(\sum_{k=0}^{\lfloor 1/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{1}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2)^{\frac{3+1}{2}-k+j} \right) = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor 3/2 \rfloor} (-1)^i \binom{3}{2i} x^{3-2i} y^{2i} \right),$$

es decir,

$$\left((-1)^{0+0} \binom{1}{0} \binom{0}{0} (x^2 + y^2)^{2-0+0} \right) - \left((-1)^0 \binom{3}{0} x^3 y^0 + (-1)^1 \binom{3}{2} x^1 y^2 \right) = 0,$$

obteniendo

$$(x^2 + y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0,$$

la cual corresponde a la rosa polar con tres pétalos con las mismas características dadas en la Figura 2.18.

Ejemplo 26. Para $n = 2$ y $d = 1$, $n \cdot d$ es par y $s = 2$. Entonces,

$$\left(\sum_{k=0}^{\lfloor 1/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^v \binom{1}{2k} \binom{k}{j} q^{\frac{2+1}{2}-v} \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor 2/2 \rfloor} (-1)^i \binom{2}{2i} x^{2-2i} y^{2i} \right)^2$$

donde $v = k + j$ y $q = x^2 + y^2$. Por lo que,

$$\left((-1)^0 \binom{1}{0} \binom{0}{0} (q)^{\frac{3}{2}-0} \right)^2 - \left((-1)^0 \binom{2}{0} x^{2-0} y^0 + (-1)^1 \binom{2}{2} x^0 y^2 \right)^2 = 0,$$

así,

$$(x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2 = 0,$$

la cual corresponde a la rosa polar con cuatro pétalos con las mismas características dadas en la Figura 2.20.

Observemos que la ecuación (2.10) que puede consultarse en [4] es muy importante para poder visualizar en cualquier graficador el tipo de rosa polar que deseemos, en el siguiente capítulo utilizaremos estas curvas para generar las superficies tipo rosa.

Capítulo 3

Superficies tipo rosa

De acuerdo a la construcción de curvas tipo rosa o de rhodonea dadas en la sección anterior, solo elegiremos a las curvas rosa que son base para generar las superficies tipo rosa como lo mostramos a continuación.

Definición 27. Sea $P = (0, 0, p)$ un punto en el eje z y sea $R(n, d)$ una rosa dada por la ecuación (2.9) en el plano $z=0$. Una superficie rosa $\mathcal{R}(n, d, p)$ es el sistema de circunferencias c_i que se encuentran en los planos ζ a través del eje z y tiene diámetro $\overline{PR_i}$, donde $R_i \neq 0$ es punto de intersección de la rosa $R(n, d)$ con el plano ζ , ver Figura 3.1.

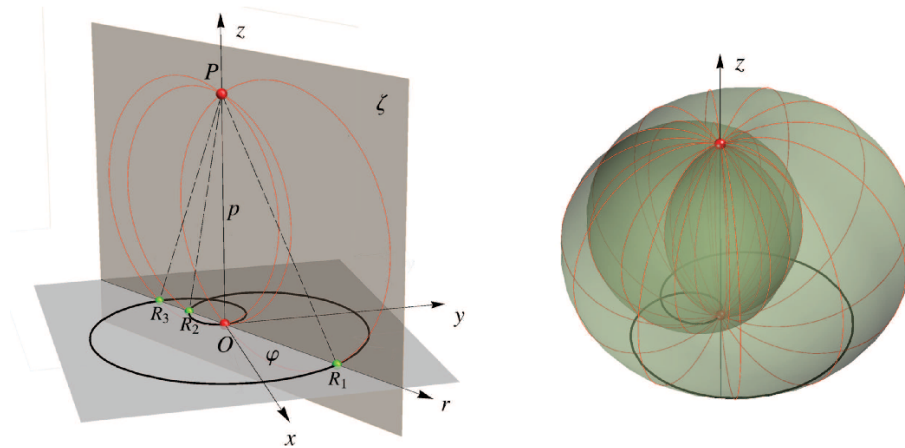


Figura 3.1: Si $n \cdot d$ es impar o par, el número de puntos $R_i \in \zeta$ es d o $2d$, respectivamente.

3.1. Ecuaciones Paramétricas de $\mathcal{R}(n, d, p)$

Consideremos $P' = (p_x, p_y, p_z)$ como una rotación del punto P sobre el plano ζ , $R(n, d)$ una rosa dada por la ecuación (2.9), ver Figura 3.2.

Consideremos el espacio euclidiano en coordenadas cilíndricas, es decir, un punto en el espacio lo vemos como (r, φ, z) , donde $r \geq 0$, $0 \leq \varphi$, $z \in \mathbb{R}$. Las coordenadas de los puntos P', C en el plano $\zeta(\varphi)$, donde φ es el ángulo entre los planos ζ y $y = 0$ están dadas por

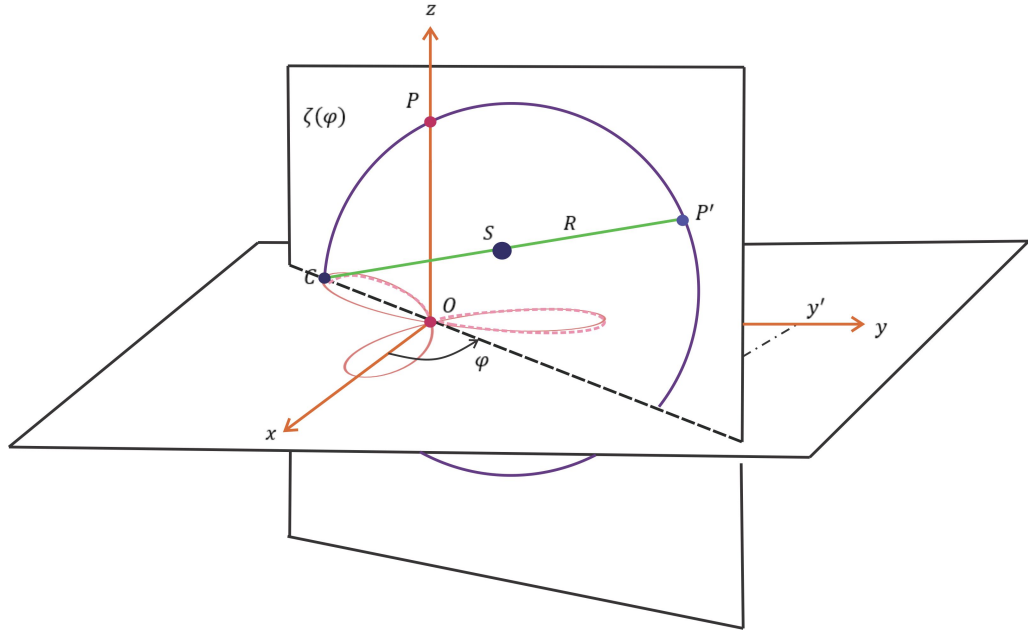


Figura 3.2: Construcción de circunferencias $c \in \zeta$.

$$\begin{aligned} (r_{P'}, \varphi, z_{P'}) &= (p_x \cos \varphi + p_y \operatorname{sen} \varphi, \varphi, p_z), \\ (r_C, \varphi, z_C) &= \left(\cos\left(\frac{n}{d}\right)\varphi, \varphi, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pues en $\triangle O x' M$, $O x' = O M \cos \varphi = p_x \cos \varphi$ y en $\triangle O y' M$, $O y' = O M \operatorname{sen} \varphi = p_y \operatorname{sen} \varphi$, ver Figura 3.3.

Como M tiene coordenadas (r, φ) , $r_{P'} = p_x \cos \varphi + p_y \operatorname{sen} \varphi$.

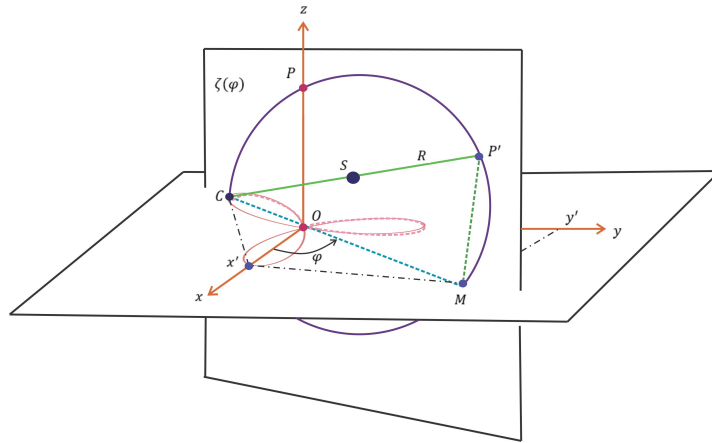


Figura 3.3: Proyección de puntos C y P' sobre el plano con coordenadas (r, φ) .

Sea R y $S = (r_S, \varphi, z_S)$ el radio y el centro de la circunferencia c en el plano $\zeta(\varphi)$, respectivamente, ver Figura 3.4. Entonces,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sqrt{(r_C - r_{P'})^2 + (z_{P'} - z_C)^2}, \\ r_S &= \frac{r_C + r_{P'}}{2}, \\ z_S &= \frac{z_C + z_{P'}}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

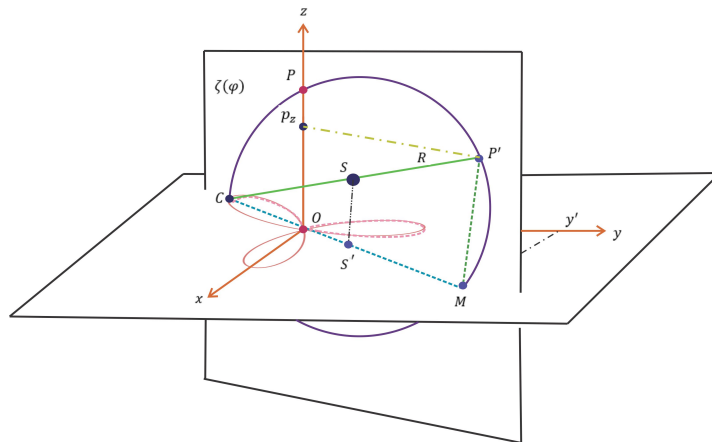


Figura 3.4: Proyección del centro S de la circunferencia c sobre el plano con coordenadas (r, φ) .

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia c en el plano $\zeta(\varphi)$ son

$$\begin{aligned} r(\theta) &= R \operatorname{sen} \theta + r_S, \\ z(\theta) &= R \cos \theta + z_S, \quad \theta \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la superficie rosa $\mathcal{R}(n, d, p)$ son las siguientes, también puede verse en [6], [7] y [8].

$$\begin{aligned} x(\varphi, \theta) &= \cos \varphi (R \operatorname{sen} \theta + r_S), \\ y(\varphi, \theta) &= \operatorname{sen} \varphi (R \operatorname{sen} \theta + r_S), \\ z(\varphi, \theta) &= R \cos \theta + z_S; \quad \varphi \in [0, \pi), \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si consideramos el punto P sin realizar dicha rotación tenemos las coordenadas de los puntos $P, C \in \zeta(\varphi)$ como

$$\begin{aligned} (r_P, \varphi, z_P)(\varphi) &= (0, \varphi, p), \\ (r_C, \varphi, z_C)(\varphi) &= \left(\cos\left(\frac{n}{d}\right)\varphi, \varphi, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

El radio R y el centro $S = (r_S, \varphi, z_S)$ de la circunferencia c , quedan determinados por

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{n}{d} \varphi + p^2}, \\ r_S &= \frac{1}{2} \cos \frac{n}{d}(\varphi), \\ z_S &= \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia c en el plano $\zeta(\varphi)$ son:

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{n}{d}(\varphi) + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \varphi} \operatorname{sen} \theta \right), \\ z(\theta) &= \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \varphi} \cos \theta \right), \quad \theta \in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\varphi \in [0, d\pi)$ si $n \cdot d$ es impar, y $\varphi \in [0, 2d\pi)$ si $n \cdot d$ es par.

Finalmente, las ecuaciones paramétricas de la superficie rosa $\mathcal{R}(n, d, p)$

son:

$$\begin{aligned} x(\varphi, \theta) &= \frac{1}{2} \cos \varphi \left(\cos \frac{n}{d}(\varphi) + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \varphi} \operatorname{sen} \theta \right), \\ y(\varphi, \theta) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \left(\cos \frac{n}{d}(\varphi) + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \varphi} \operatorname{sen} \theta \right), \\ z(\varphi, \theta) &= \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{\cos^2 \frac{n}{d} \varphi} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2. Ecuaciones implícitas de $\mathcal{R}(n, d, p)$

Teorema 28. *Las superficies rosa $\mathcal{R}(n, d, p)$ son dadas por las siguientes ecuaciones implícitas:*

Si $n > d$, esta dada por,

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{s(n-d)}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2 + z^2 - p \cdot z)^A (x^2 + y^2)^{k-j} \right)^s \\ = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} \right)^s, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $A = d - 2(k - j)$.

Si $n < d$, la ecuación es,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{d}{2k} \binom{k}{j} (x^2 + y^2 + z^2 - p \cdot z)^{d-2(k-j)} (x^2 + y^2)^{k-j} \right)^s \\ = (x^2 + y^2)^{\frac{s(d-n)}{2}} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} \right)^s, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $s = 1$ si $n \cdot d$ es impar y $s = 2$ si $n \cdot d$ es par, las ecuaciones (3.9) y (3.10) también pueden consultarse en [10].

Demostración. Tenemos que $\cos \frac{n}{d} \varphi = \cos n\varphi$, recordemos (2.11). Así, en el plano $\zeta(\varphi)$ a través del eje z , en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , la ecuación de la circunferencia c es

$$(r - r_S)^2 + (z - z_S)^2 = R^2,$$

es decir,

$$\left(r - \frac{\cos \frac{n}{d}\varphi}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\cos^2 \frac{n}{d}\varphi + p^2\right), \quad (3.11)$$

sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (3.11) obtenemos la siguiente condición para los puntos de $\mathcal{R}(n, d, p)$

$$\cos \frac{n}{d}\varphi = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - p \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{sen } \frac{n}{d}\varphi = \sqrt{1 - \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - p \cdot z)^2}{(x^2 + y^2)}}, \quad (3.12)$$

sustituyendo (3.12) y $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\text{sen } \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ dentro de la

ecuación (2.11), obtenemos lo siguiente

Si $n > d$, tenemos (3.9) donde $A = d - 2(k - j)$.

Si $n < d$, tenemos (3.10) donde $s = 1$ si $n \cdot d$ es impar y $s = 2$ si $n \cdot d$ es par, para ambos casos. \square

3.3. Visualización de $\mathcal{R}(n, d, p)$

Las siguientes figuras están generadas con el software Mathematica, dichas figuras pueden consultarse en [4], [17], [18] y [19].

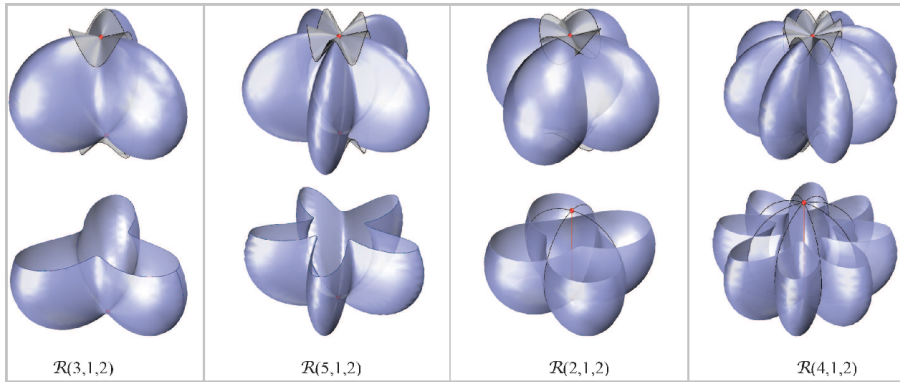


Figura 3.5: Si $d = 1$ y $p \neq 0$.

La Figura 3.5 muestra superficies tipo rosa dada por $\mathcal{R}(n, 1, p)$, donde $n = 3, 5, 2$ y 4 , respectivamente, con $p = 2$.

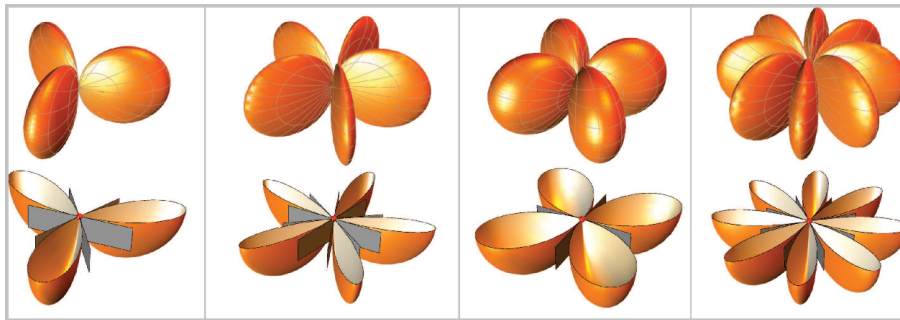


Figura 3.6: Si $d = 1$ y $p = 0$.

La Figura 3.6 muestra superficies tipo rosa dada por $\mathcal{R}(n, 1, 0)$, con $n = 3, 5, 2$ y 4 , respectivamente.

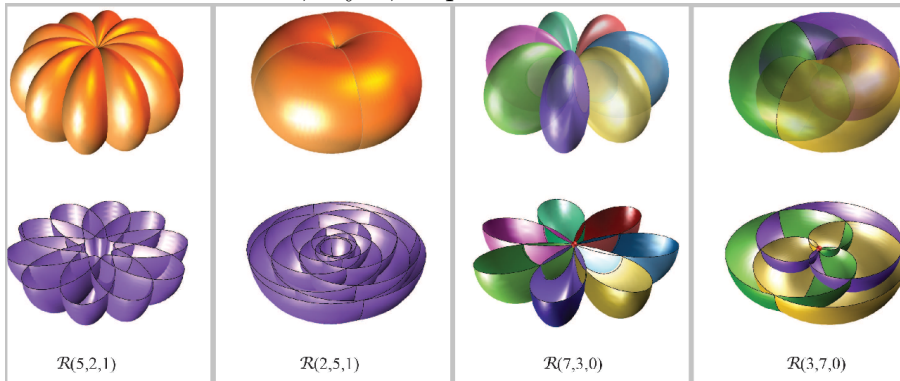


Figura 3.7: Cuatro superficies rosas.

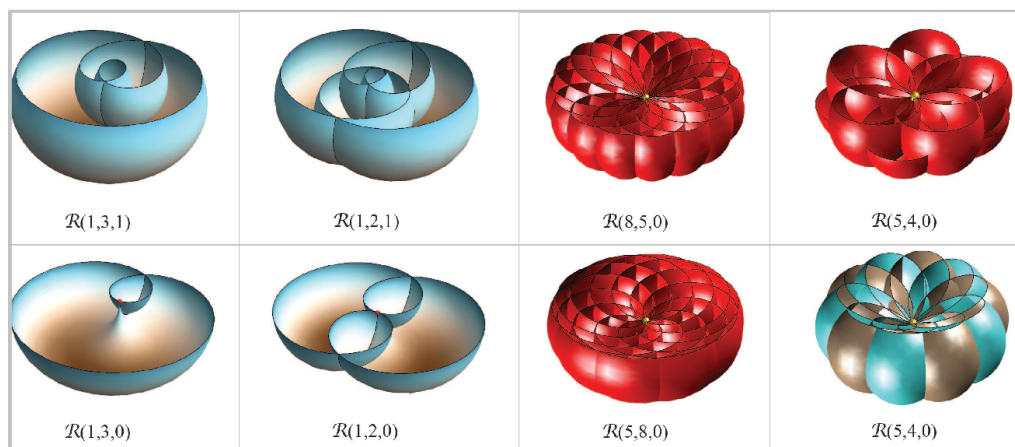


Figura 3.8: Otras superficies rosas.

Las Figuras 3.7 y 3.8 muestran superficies tipo rosa dada por $\mathcal{R}(n, d, p)$ con n y d variables, para valores de p donde $p = 0$ o 1 .

3.4. Generalización de Superficies tipo rosa

En el Capítulo 1 vimos la definición de superficie circular así como algunos tipos de congruencias circulares, necesitamos dichos conceptos para dar paso a la generalización de las superficies tipo rosa.

Definición 29. Una superficie tipo rosa generalizada $\mathcal{R}(p, k, n, d, a)$ es la superficie circular $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ donde α es una curva de dirección, es decir, α es la curva cíclica armónica $CH(n, d, a)$ que se encuentra en el plano $z = k$.

Para más detalles la Definición 29 puede consultarse en [5].

Algunas superficies tipo rosa generalizadas $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ para $\alpha = CH(n, d, 0)$ y $p \in \mathbb{R}$ se denominan simplemente superficies tipo rosa como las descritas en la sección anterior.

En esta sección presentamos la extensión de las superficies tipo rosa, es decir, trataremos a $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ para $\alpha = CH(n, d, a)$ cuando $a \neq 0$ y $p \in \mathbb{C}$, donde \mathbb{C} es el conjunto de los números complejos.

Proposición 30. Una curva cíclica armónica $CH(n, d, a)$ con $a \neq 0$, esta dada por la siguiente ecuación implícita.

-Si n es un número par (d puede ser impar)

$$\begin{aligned}
& (x^2 + y^2)^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l+1} a^B (x^2 + y^2)^l \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} - (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \right. \\
&\quad \left. \binom{d-2k}{2l} a^B (x^2 + y^2)^l \right)^2 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

donde $B = d - 2k - 2l$.

-Si n es un número impar

$$\begin{aligned}
& (x^2 + y^2)^n \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l} a^{d-2k-2l} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} - (x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^D (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \right. \\
&\quad \left. \binom{d-2k}{2l+1} a^{d-2k-2l-1} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \quad (3.14)
\end{aligned}$$

donde

$$D = \begin{cases} \lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor & \text{si } d \text{ es impar,} \\ \lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor - 1 & \text{si } d \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Demostración. Los casos cuando $a = 0$ fueron probados en la sección anterior, por lo tanto solo nos queda demostrar cuando $a \neq 0$.

Al sustituir las fórmulas estándar para convertir coordenadas polares a cartesianas, es decir, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en

(2.8) y usando la identidad trigonométrica, obtenemos la siguiente condición para los puntos en $CH(n, d, a)$:

$$\cos \frac{n}{d} \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} - a, \quad \sin \frac{n}{d} \varphi = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2}. \quad (3.16)$$

Utilizando de nuevo la fórmula del ángulo múltiple del coseno, tenemos (2.11). Así,

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^j \binom{d}{2j} (1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2)^j (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^{d-2j} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando el Teorema del binomio a la expresión $(1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2)^j$, la ecuación (3.17) se convierte en

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j (-1)^{2j-k} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^{d-2k} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando la misma fórmula esta vez aplicada a $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^{d-2k}$, obtenemos

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{d-2k} (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{l} a^{d-2k-l} (x^2 + y^2)^{\frac{l}{2}} \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.19) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l} a^{d-2k-2l} (x^2 + y^2)^l \\ + (x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^D (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l+1} a^{d-2k-2l-1} (x^2 + y^2)^l \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$D = \begin{cases} \lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor & \text{si } d \text{ es impar,} \\ \lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor - 1 & \text{si } d \text{ es par.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, las ecuaciones implícitas de las curvas cíclicas armónicas son:

-Si n es un número par (d puede ser impar)

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l+1} a^{B-1} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} - (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \right. \\ & \quad \left. \binom{d-2k}{2l} a^{d-2k-2l} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \quad (3.22) \end{aligned}$$

donde $B - 1 = d - 2k - 2l - 1$.

-Si n es un número impar

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)^n \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{d-2k}{2} \rfloor} (-1)^{d-k} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \binom{d-2k}{2l} a^{d-2k-2l} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n}{2i} x^{n-2i} y^{2i} - (x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^D (-1)^{d-k-l} \binom{d}{2j} \binom{j}{k} \right. \\ & \quad \left. \binom{d-2k}{2l+1} a^{d-2k-2l-1} (x^2 + y^2)^l \right)^2 \quad (3.23) \end{aligned}$$

donde D es como en (3.21). □

Como la curva $\alpha = CH(n, d, a)$ se encuentra en el plano $z = k$, el origen de esta curva puede o no encontrarse en el eje z , en el Cuadro 2.1 dicha curva tiene como punto múltiple al origen que es denotado por O , el cual esta determinado por $2n$ o n si a es par o impar, respectivamente.

A un punto cualquiera sobre la curva $CH(n, d, a)$ distinto de O lo denotamos por D^j , de acuerdo a esto y a la Definición 29 podemos dar la siguiente clasificación, ver [10] y [11]:

Tipo 1: $O = P_1$ o $O = P_2$;

Tipo 2: $O \in z, O \neq P_i, i = 1, 2$;

Tipo 3: $D^j = P_1$ o $D^j = P_2$;

Tipo 4: $D^j \in z, D^j \neq P_i, i = 1, 2$;

Tipo 5: $\forall Z \in z, Z \notin CH(n, d, a)$.

3.5. Visualización de las superficies tipo rosa generalizadas

Los ejemplos siguientes fueron calculados y trazados en el programa Mathematica, que pueden consultarse en [10] y [19].

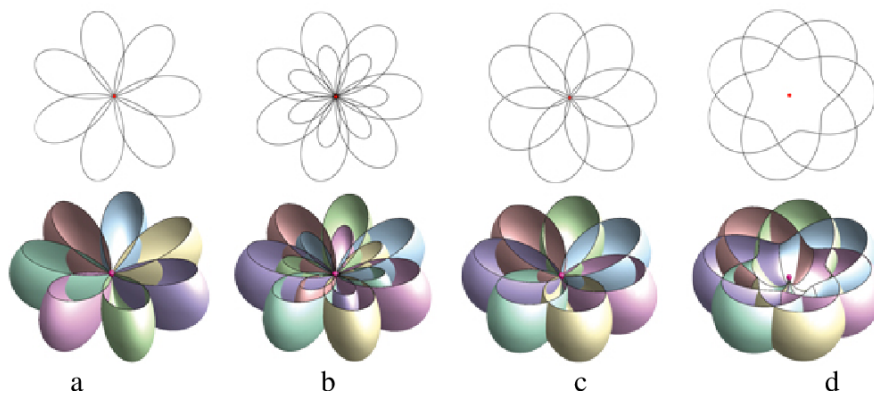


Figura 3.9: $\mathcal{CS}(\alpha, 0)$ de Tipo 1.

Las superficies tipo rosa generalizada que se muestran en la Figura 3.9 dadas por $\mathcal{R}(0, 0, 7, 3, a)$, tiene como superficie circular a $\mathcal{CS}(\alpha, 0)$. En el caso a, $\alpha = CH(7, 3, 0)$; en el caso b, $\alpha = CH(7, 3, 0.25)$; en el caso c, $\alpha = CH(7, 3, 1)$ y en el caso d, $\alpha = CH(7, 3, 2.5)$. La curva tipo rosa correspondiente se encuentra en el plano $z = 0$ y tienen como congruencia a $\mathcal{C}(0)$ el cual es una congruencia parabólica.

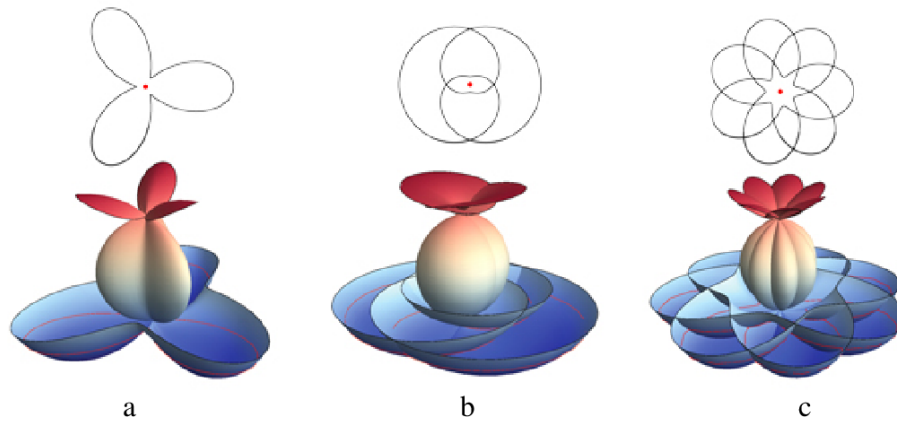


Figura 3.10: $\mathcal{CS}(\alpha, 1)$ de Tipo 1.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.10, tiene como superficie circular a $\mathcal{CS}(\alpha, 1)$. En el caso a, $\alpha = CH(3, 1, 1.25)$; en el caso b, $\alpha = CH(2, 3, 1.25)$ y en el caso c, $\alpha = CH(7, 3, 1.25)$. Para $k = -1$, dicha curva se encuentra en el plano $z = -1$ y tienen como congruencia a $\mathcal{C}(1)$ el cual es una congruencia elíptica.

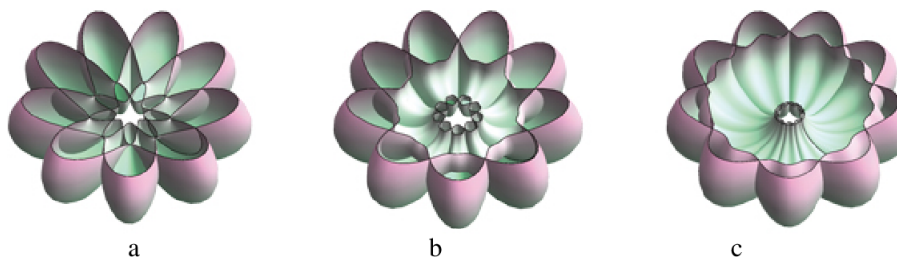
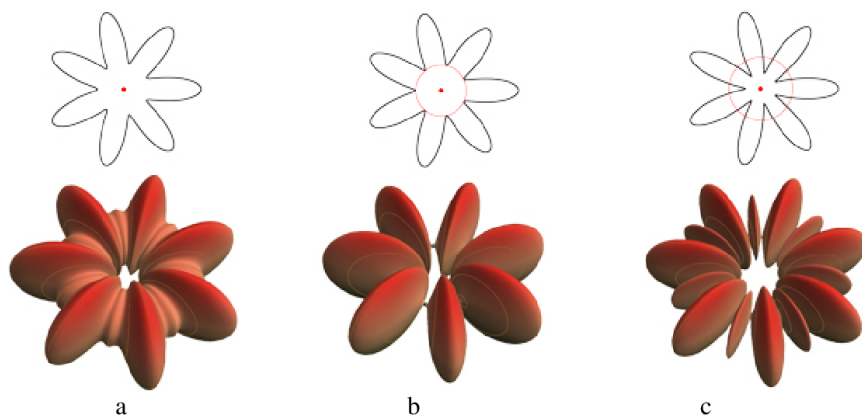
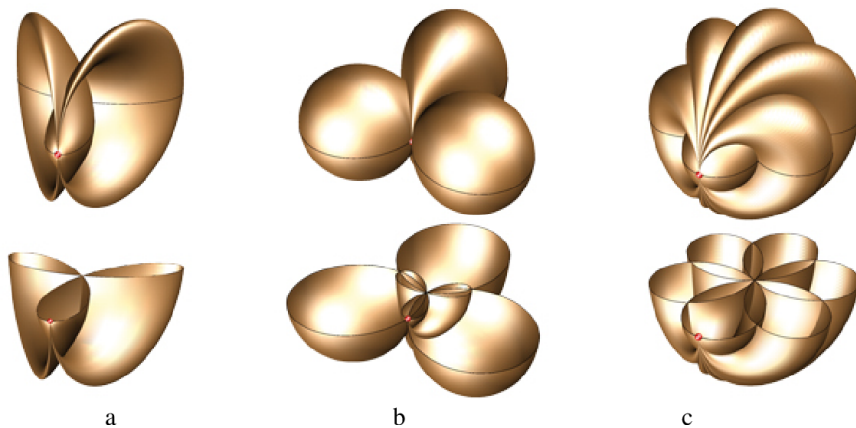


Figura 3.11: $\mathcal{CS}(\alpha, i)$ de Tipo 2.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.11 dada por $\mathcal{R}(i, k, 9, 2, 2)$, donde $k = 0, 0.5, 1$ tiene como superficie circular a $\mathcal{CS}(\alpha, i)$ para $\alpha = CH(9, 2, 2)$ la cual se encuentra en el plano $z = 0, 0.5, 1$ y tienen como congruencia a $\mathcal{C}(0)$ siendo esta una congruencia hiperbólica.

Figura 3.12: $\mathcal{CS}(\alpha, i)$ de Tipo 2.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.12 a y b, tiene como superficie circular a $\mathcal{CS}(\alpha, i)$ para $\alpha = CH(7, 1, 2)$ con $k = 0.75, 0$, respectivamente, y para la curva tipo rosa correspondiente se encuentra en el plano $z = 0.75, 0$. Y para c, $\alpha = CH(7, 1, 1.5)$ con $k = 0$, esta curva se encuentra en el plano $z = 0$.

Figura 3.13: $\mathcal{CS}(\alpha, 0)$ de Tipo 3.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.13 tienen como congruencia a $\mathcal{C}(0)$ siendo una congruencia parabólica y tiene como superficies circulares en el caso a, $\alpha = CH(3, 1, 0)$; en el caso b, $\alpha = CH(3, 2, 0.5)$ y en el caso c, $\alpha = CH(3, 2, 0)$, para $k = 0$.

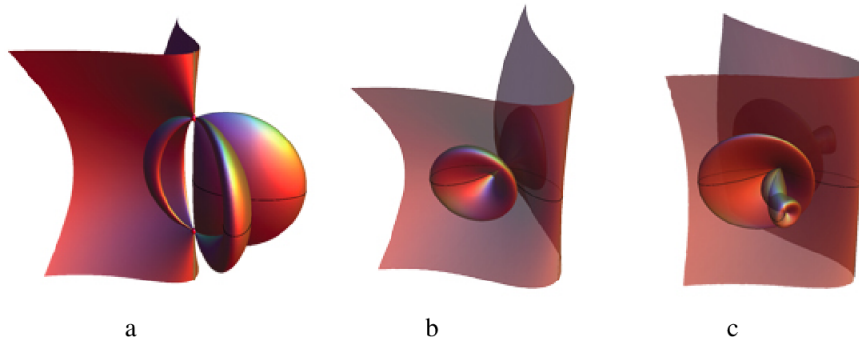


Figura 3.14: $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ de Tipo 4.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.14 considerando a las superficies circulares para a como $\alpha = CH(3, 1, 0)$ con $p = 1$, para b $\alpha = CH(3, 1, 0)$ con $p = i$ y c con $\alpha = CH(5, 1, 0)$ para $p = i$, con α en el plano $z = 0$.

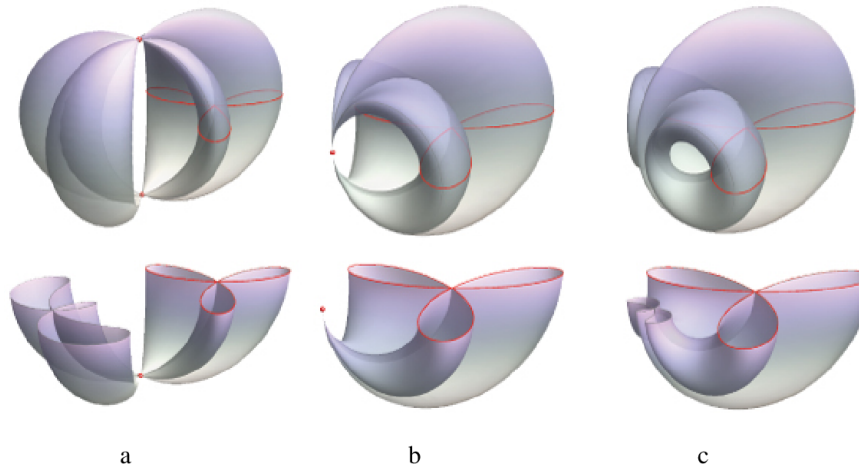


Figura 3.15: $\mathcal{CS}(\alpha, p)$ de Tipo 5.

La superficie tipo rosa generalizada que se muestra en la Figura 3.15 tiene como superficies circulares a $\alpha = CH(3, 1, 0)$ para $p = 1, 0, i$ con α en el plano $z = 0$.

Apéndice

Los códigos que se muestran a continuación fueron hechos en el software Mathematica con el fin de poder visualizar las curvas y superficies tipo rosa, las figuras que no se muestran fueron realizadas en otros software como: Corel Draw, Geogebra y Desmos que tienen predefinida a la rosa polar, o donde pueden ser mejor manipuladas.

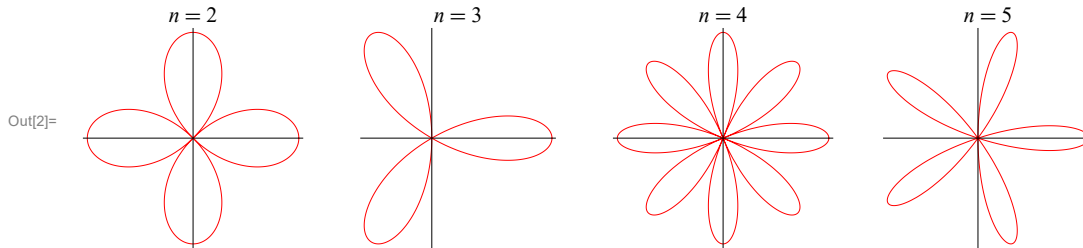
Código para la visualización de la rosa polar o curva tipo rosa.

* n es entero

```
In[1]:= Show[GraphicsArray[Table[PolarPlot[Cos[n t], {t, 0, (Mod[n + 1, 2] + 1) Pi},
  PlotLabel -> TraditionalForm[HoldForm[n] == n],
  Ticks -> None, PlotStyle -> Red, DisplayFunction -> Identity], {n, 2, 5}]
]]
```

GraphicsArray::obs : GraphicsArray is obsolete. Switching to GraphicsGrid. >>

```
In[2]:= Show[%1, ImageSize -> Large]
```



* n es racional

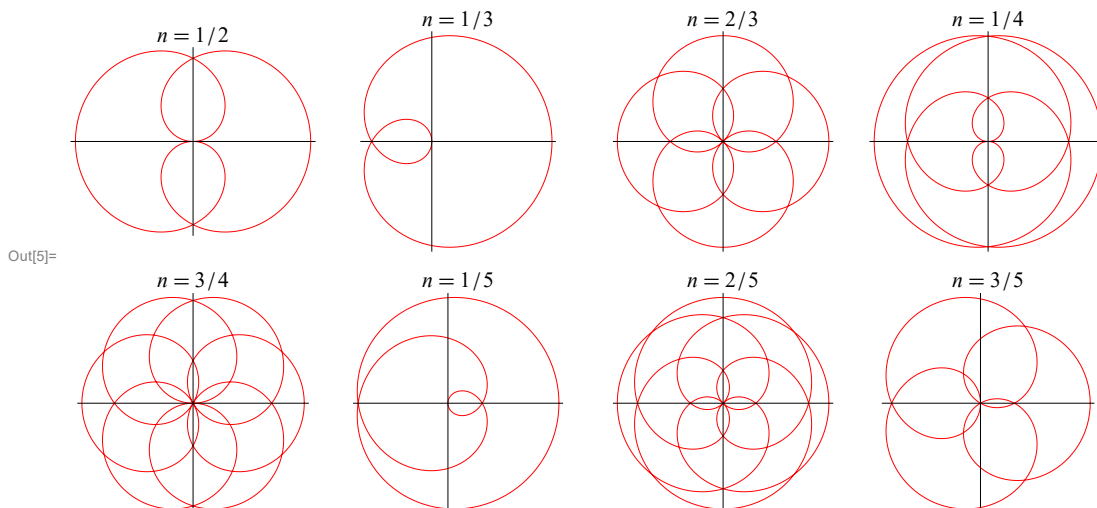
```
In[3]:= Pi Denominator[#] If[EvenQ[# /. Rational[x_, y_] := x y], 2, 1] & /@
{1 / 2, 1 / 3, 2 / 3, 1 / 4, 3 / 4, 1 / 5, 2 / 5, 3 / 5}
```

```
Out[3]= {4 π, 3 π, 6 π, 8 π, 8 π, 5 π, 10 π, 5 π}
```

```
In[4]:= Show[GraphicsArray[Partition[
  PolarPlot[Cos[# t],
    {t, 0, Pi Denominator[#] If[EvenQ[# /. Rational[x_, y_] := x y], 2, 1]},
  PlotLabel -> TraditionalForm[n == InputForm[#]],
  PlotPoints -> 100, DisplayFunction -> Identity,
  Ticks -> None, PlotStyle -> Red] & /@
{1 / 2, 1 / 3, 2 / 3, 1 / 4, 3 / 4, 1 / 5, 2 / 5, 3 / 5}, 4, 4, {1, 1}, {}]]]
```

GraphicsArray::obs : GraphicsArray is obsolete. Switching to GraphicsGrid. >>

```
In[5]:= Show[%4, ImageSize -> Large]
```

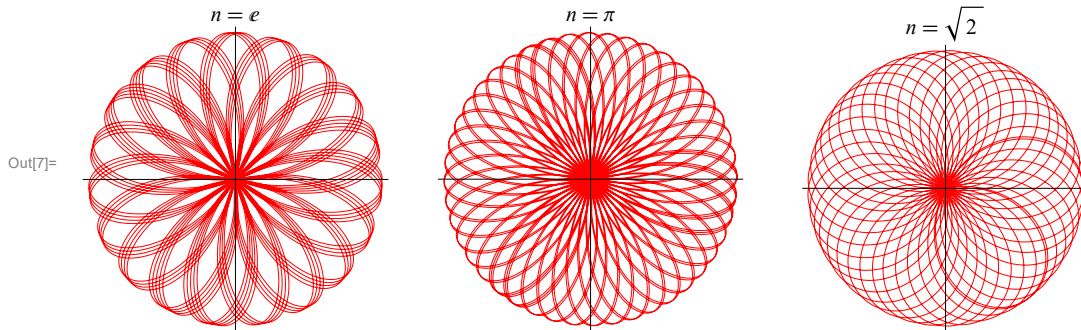


* n es irracional

```
In[6]:= Show[GraphicsArray[PolarPlot[Cos[# t], {t, 0, 30 Pi},  
PlotLabel -> TraditionalForm[n == #],  
PlotPoints -> 100, DisplayFunction -> Identity,  
Ticks -> None, PlotStyle -> Red] & /@ {E, Pi, Sqrt[2]}]]
```

GraphicsArray::obs : GraphicsArray is obsolete. Switching to GraphicsGrid. >>

```
In[7]:= Show[%6, ImageSize -> Large]
```



Código de las superficies tipo rosa.

```
rose[n_, d_] :=
  {Cos[u] * Sin[Rational[n, d] * u], Sin[u] * Sin[Rational[n, d] * u], 0};

roseSur[n_, d_] := {1/2 Cos[u] (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Sin[u]
  (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Cos[v] * Sin[(n/d * u)]};

tocka[t_, s_] :=
  ParametricPlot3D[{t * Sin[v] * Cos[u], t * Sin[v] * Sin[u], t * Cos[v]}, {u, 0, Pi},
    {v, 0, 2 Pi}, Mesh -> None, PlotStyle -> {Hue[s], Specularity[White, 30]};

opt = {PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-0.5, 0.5}},
  Lighting -> {{White, ImageScaled[{1, 1, 0.5}]},
    {White, ImageScaled[{-1, -1, 0.5}]}, Boxed -> False, Axes -> None,
  Background -> GrayLevel[0.7], ImageSize -> {550, 400}};

roseSurfaceOd[n_, d_] := Show[Table[ParametricPlot3D[
  roseSur[Numerator[Rational[n, d]], Denominator[Rational[n, d]]],
  {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
    (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
  {v, Pi / 4, 3 Pi / 2}, PlotStyle -> {Red, Specularity[White, 30]}, Mesh -> {0, 0},
  BoundaryStyle -> Black], {i, 0, Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  Table[ParametricPlot3D[roseSur[Numerator[Rational[n, d]],
    Denominator[Rational[n, d]]],
  {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
    (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
  {v, -Pi / 2, 3 Pi / 4}, PlotStyle -> {Red, Specularity[White, 30]}, Mesh -> {0, 0},
  BoundaryStyle -> Black], {i, 1, Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  tocka[0.04, 0.13],
  opt];

roseSurfaceEv[n_, d_] :=
  Show[Table[ParametricPlot3D[
  roseSur[Numerator[Rational[n, d]], Denominator[Rational[n, d]]],
  {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
    (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
  {v, Pi / 4, 3 Pi / 2}, PlotStyle -> {Red, Specularity[White, 30]}, Mesh -> {0, 0},
  BoundaryStyle -> Black], {i, 0, 2 * Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  Table[ParametricPlot3D[roseSur[Numerator[Rational[n, d]],
    Denominator[Rational[n, d]]],
  {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
    (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
  {v, -Pi / 2, 3 Pi / 4}, PlotStyle -> {Red, Specularity[White, 30]}, Mesh -> {0, 0},
  BoundaryStyle -> Black], {i, 1, 2 * Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  tocka[0.04, 0.13],
  opt];

roseSurface[n_, d_] :=
  If[OddQ[Numerator[Rational[n, d]]] && OddQ[Denominator[Rational[n, d]]],
    roseSurfaceOd[n, d], roseSurfaceEv[n, d]];

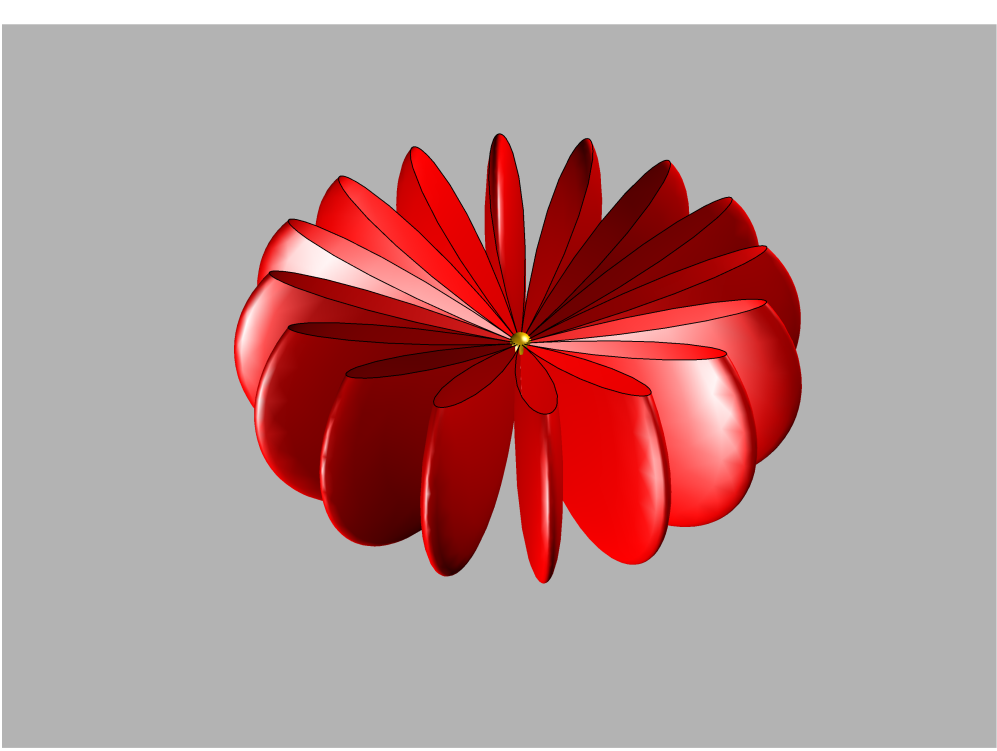
figure := {roseSurface};
```

```
Manipulate[  
  figure[[1]][a, b],  
  {{j, 1, "appearance"}, {1 → "red"}, PopupMenu},  
  {{a, 9, "numerator n"}, 9, 1, -1},  
  {{b, 1, "denominator d"}, 1, 9, 1},  
  ControlType → Setter, SaveDefinitions → True]
```

appearance red ▼

numerator n 9 8 7 6 5 4 3 2 1

denominator d 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Código de Superficies tipo rosa en colores

```
rose[n_, d_] :=
  {Cos[u] * Sin[Rational[n, d] * u], Sin[u] * Sin[Rational[n, d] * u], 0};

roseSur[n_, d_] := {1/2 Cos[u] (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Sin[u]
  (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Cos[v] * Sin[(n/d * u)]};

rosel[n_, d_] :=
  If[OddQ[Numerator[Rational[n, d]]] && OddQ[Denominator[Rational[n, d]]],
    ParametricPlot3D[rose[n, d], {u, 0, Denominator[Rational[n, d]] * Pi},
      PlotStyle -> {Hue[0.9, 0.8, 1], Thickness[0.003]}],
    ParametricPlot3D[rose[n, d], {u, 0, 2 Denominator[Rational[n, d]] * Pi},
      PlotStyle -> {Hue[0.9, 0.8, 1], Thickness[0.003]}]];

tocka[t_, s_] :=
  ParametricPlot3D[{t * Sin[v] * Cos[u], t * Sin[v] * Sin[u], t * Cos[v]}, {u, 0, Pi},
    {v, 0, 2 Pi}, Mesh -> None, PlotStyle -> {Hue[s], Specularity[White, 30]}];

opt1 = {Lighting -> "Neutral", PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-0.5, 0.5}},
  ImageSize -> {550, 400}, Background -> GrayLevel[0.7]};

roseSurfaceOdl[n_, d_] :=
  Show[Table[ParametricPlot3D[roseSur[Numerator[Rational[n, d]],
    Denominator[Rational[n, d]], {u, i * Denominator[Rational[n, d]] *
    Pi / Numerator[Rational[n, d]], (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] *
    Pi / Numerator[Rational[n, d]]}, {v, Pi / 4, 3 Pi / 2}, PlotStyle ->
    {FaceForm[Lighter[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]], 0.9, 0.9]], Darker[
    Hue[i / Numerator[Rational[n, d]], 0.9, 0.9]]], Specularity[White, 30]}],
    Mesh -> {0, 0}, BoundaryStyle -> Black], {i, 0, Numerator[Rational[n, d]], 2}],

  Table[ParametricPlot3D[
    roseSur[Numerator[Rational[n, d]], Denominator[Rational[n, d]],
    {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
    (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
    {v, -Pi / 2, 3 Pi / 4}, PlotStyle ->
    {FaceForm[Darker[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]], 0.9, 0.9]], Lighter[
    Hue[i / Numerator[Rational[n, d]], 0.9, 0.9]]], Specularity[White, 30]}],
    Mesh -> {0, 0}, BoundaryStyle -> Black], {i, 1, Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  tocka[0.04, 0.13],
  opt];
```

```

roseSurfaceEv1[n_, d_] :=
  Show[Table[ParametricPlot3D[
    roseSur[Numerator[Rational[n, d]], Denominator[Rational[n, d]]],
    {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
      (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
    {v, Pi / 4, 3 Pi / 2}, PlotStyle →
    {FaceForm[Lighter[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]] / 2, 0.9, 0.9]],
      Darker[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]] / 2, 0.9, 0.9]]],
    Specularity[White, 30]}, Mesh → {0, 0}, BoundaryStyle → Black],
    {i, 0, 2 * Numerator[Rational[n, d]], 2}],

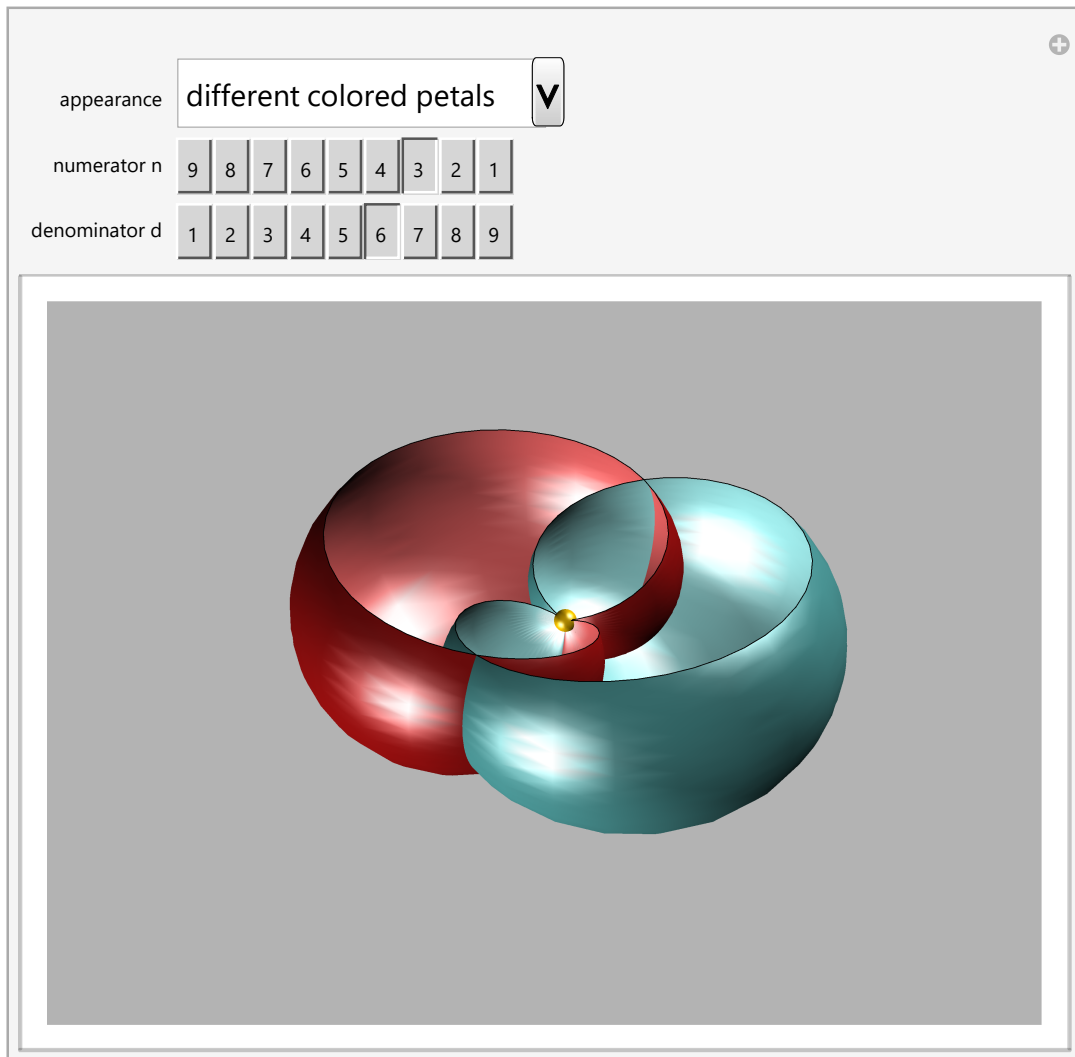
  Table[ParametricPlot3D[
    roseSur[Numerator[Rational[n, d]], Denominator[Rational[n, d]]],
    {u, i * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]],
      (i + 1) * Denominator[Rational[n, d]] * Pi / Numerator[Rational[n, d]]},
    {v, -Pi / 2, 3 Pi / 4}, PlotStyle →
    {FaceForm[Darker[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]] / 2, 0.5, 0.9]],
      Lighter[Hue[i / Numerator[Rational[n, d]] / 2, 0.5, 0.9]]],
    Specularity[White, 30]}, Mesh → {0, 0}, BoundaryStyle → Black],
    {i, 1, 2 * Numerator[Rational[n, d]], 2}],
  tocka[0.04, 0.13],
  opt];

roseSurface1[n_, d_] :=
  If[OddQ[Numerator[Rational[n, d]]] && OddQ[Denominator[Rational[n, d]]],
    roseSurfaceOd1[n, d], roseSurfaceEv1[n, d]];

figure := {roseSurface1};

```

```
Manipulate[  
  figure[[1]][a, b],  
  {{j, 2, "appearance"}, {2 → "different colored petals", } , PopupMenu },  
  {{a, 9, "numerator n"}, 9, 1, -1},  
  {{b, 1, "denominator d"}, 1, 9, 1},  
  ControlType → Setter, SaveDefinitions → True]
```



Código de la construcción de las superficies tipo rosa.

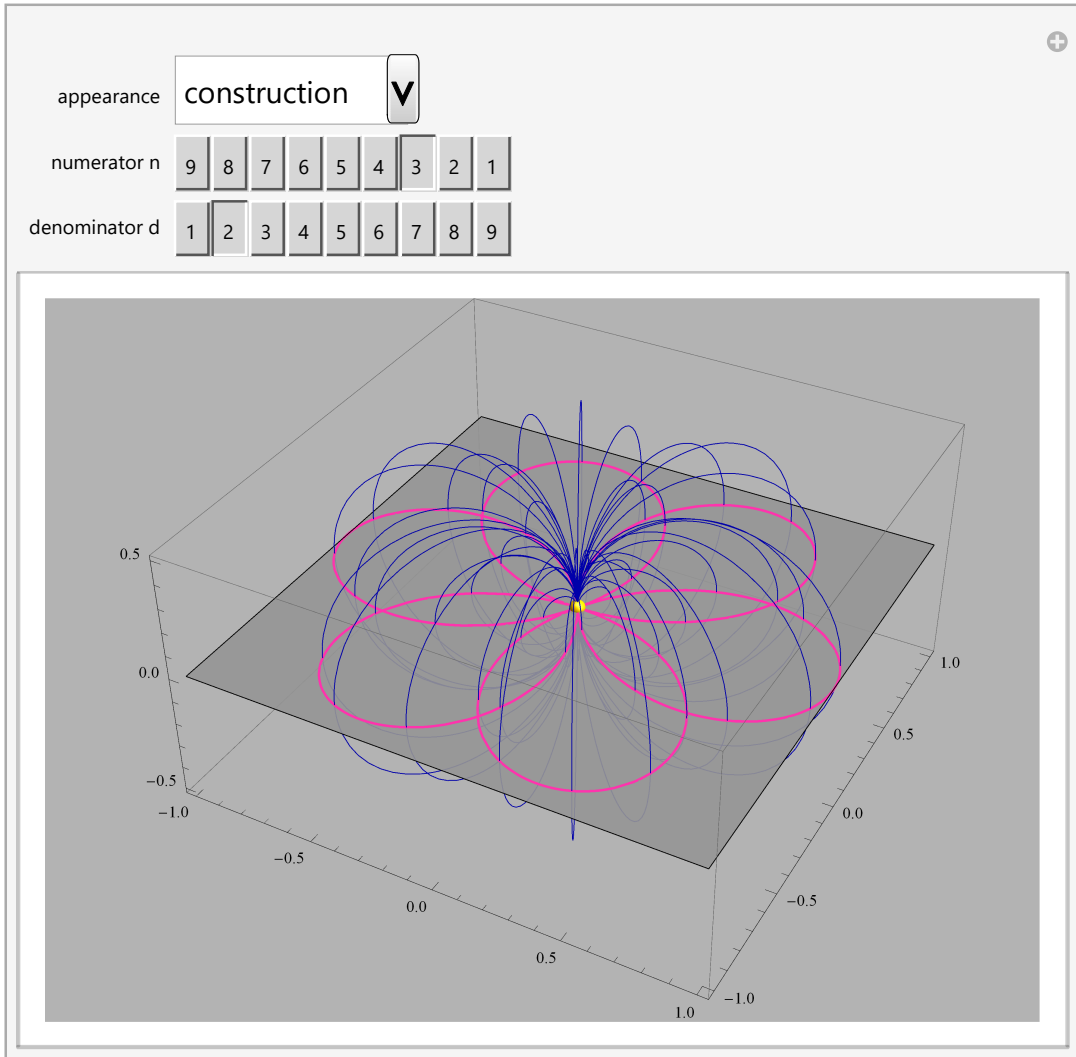
```
In[101]:= rose[n_, d_] :=  
  {Cos[u] * Sin[Rational[n, d] * u], Sin[u] * Sin[Rational[n, d] * u], 0};  
  
In[102]:= roseSur[n_, d_] := {1/2 Cos[u] (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Sin[u]  
  (Sin[n/d * u] + Sin[(n/d * u)] * Sin[v]), 1/2 Cos[v] * Sin[(n/d * u)]};  
  
In[103]:= rose1[n_, d_] :=  
  If[OddQ[Numerator[Rational[n, d]]] && OddQ[Denominator[Rational[n, d]]],  
    ParametricPlot3D[rose[n, d], {u, 0, Denominator[Rational[n, d]] * Pi},  
      PlotStyle -> {Hue[0.9, 0.8, 1], Thickness[0.003]}],  
    ParametricPlot3D[rose[n, d], {u, 0, 2 Denominator[Rational[n, d]] * Pi},  
      PlotStyle -> {Hue[0.9, 0.8, 1], Thickness[0.003]}];  
  
In[104]:= circles[n_, d_] :=  
  If[OddQ[Numerator[Rational[n, d]]] && OddQ[Denominator[Rational[n, d]]],  
    Table[ParametricPlot3D[roseSur[n, d] // Evaluate, {v, 0, 2 Pi},  
      PlotStyle -> Darker[Blue]], {u, 0, Denominator[Rational[n, d]] * Pi,  
      Denominator[Rational[n, d]] * Pi / 31}],  
    Table[ParametricPlot3D[roseSur[n, d] // Evaluate, {v, 0, 2 Pi},  
      PlotStyle -> Darker[Blue]], {u, 0, 2 Denominator[Rational[n, d]] * Pi,  
      Denominator[Rational[n, d]] * Pi / 23}];  
  
In[105]:= tocka[t_, s_] :=  
  ParametricPlot3D[{t * Sin[v] * Cos[u], t * Sin[v] * Sin[u], t * Cos[v]}, {u, 0, Pi},  
    {v, 0, 2 Pi}, Mesh -> None, PlotStyle -> {Hue[s], Specularity[White, 30]}];  
  
In[106]:= plane = ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle ->  
  {GrayLevel[0.5], Opacity[0.9]}, Mesh -> {0, 0}, BoundaryStyle -> Black];  
  
In[107]:= opt1 = {Lighting -> "Neutral", PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}, {-0.5, 0.5}},  
  ImageSize -> {550, 400}, Background -> GrayLevel[0.7]};  
  
In[108]:= roseSurface2[n_, d_] :=  
  Show[circles[n, d], rose1[n, d], tocka[0.03, 0.13], plane, opt1]  
  
In[109]:= figure := {roseSurface2};
```

```

In[110]:= Manipulate[
  figure[[1]][a, b],
  {{j, 3, "appearance"}, {3 → "construction"}, PopupMenu},
  {{a, 9, "numerator n"}, 9, 1, -1},
  {{b, 1, "denominator d"}, 1, 9, 1},
  ControlType → Setter, SaveDefinitions → True]

```

Out[110]=



Bibliografía

- [1] V. BENIĆ, S. GORJANC, $(1, n)$ Congruences. KoG, **10** (2006), 5-12.
- [2] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Les Congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles, Deuxième partie, Imprimerie Gauthier-Villars et fils, Paris, 1889.
- [3] L. P. EISENHART, *Congruences of Curves*. Trans. Amer. Math. Soc. **4** (1907), 470-488.
- [4] S. GORJANC, *Rose Surfaces and their Visualizations*. J. Geom. Grap. **14** (2010), 59-67.
- [5] S. GORJANC, *Circular Surfaces $CS(\alpha, p)$* . 2nd Croatian Conference on Geometry and Graphics, 2010.
- [6] S. GORJANC, *Pedal Surfaces of First Order Line Congruences*. 70 Years of FCE STU, International Scientific Conference, 2008.
- [7] S. GORJANC, *Pedal Surfaces of First Order Congruences*. KoG, **13** (2009), 27-42.
- [8] S. GORJANC, *Special n th Order Surfaces with $(n - 2)$ -ple Line*. Proc. of 13th ICGG, Dresden, 2008.
- [9] S. GORJANC, E. JURKIN, *Circular Surfaces $CS(\alpha, p)$* . Filomat, **29** (2015), 725-737.
- [10] S. GORJANC, E. JURKIN, *Generalized Rose Surfaces and their Visualizations*. Novi Sad J. Math., **45** (2015), 173-185.

- [11] S. GORJANC, E. JURKIN, *Visualization of special circular surfaces*. The 15th International Conference on Geometry and Graphics, 2012.
- [12] C. M. JESSOP, *A Treatise on the Line Geometry*. Chelsea Publishing Company, New York, 1969. (reprint).
- [13] R. E. MORITZ, *On the Construction of Certain Curves Given in Polar Coordinates*. Amer. Math. Monthly, **24** (1917), 213-220.
- [14] G. SALMON, *A Treatise on Conic Section*, Tercera edición, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
- [15] G. SALMON, *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, Vol. I. Chelsea Publishing Company, New York, 1958. (reprint)
- [16] G. SALMON, *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, Vol. II. Chelsea Publishing Company, New York, 1965. (reprint).
- [17] Special Rose Surfaces de The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/SpecialRoseSurfaces/> Contributed by: Sonja Gorjanc. Revisado 14 Agosto de 2019.
- [18] E. W. Weisstein,.: Rose. From MathWorld A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>. Revisado 14 Agosto de 2019.
- [19] Twisting Rose Surfaces de The Wolfram Demonstrations Project <http://demonstrations.wolfram.com/TwistingRoseSurfaces/>. Revisado 14 Agosto de 2019.
- [20] <http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html>. Revisado el 5 de Diciembre de 2019.
- [21] https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_arm%C3%B3nico_simple. Revisado el 9 de Enero de 2020.
- [22] <https://es.khanacademy.org/science/ap-physics-1/ap-mechanical-waves-and-sound/ap-simple-harmonic-motion-with-calculus/v/introduction-to-harmonic-motion?modal=1>. Revisado el 14 de Enero de 2020.
- [23] https://www.youtube.com/watch?v=5dx8XEQ_Mj4. Revisado el 27 de Enero de 2020.